חוברת קיץ לעולים לכיתה יא'

תלמידי 5 יח"ל

הקדמה:

תלמידים יקרים,

לפניכם עבודת קיץ במתמטיקה המיועדת לתלמידי כיתה י' העולים לכיתה י"א ברמת 5 יחידות.

העבודה מורכבת משאלות נבחרות מתוך האתר bagrut.gool.co.il.

לרוב התרגילים בעבודה קיים **פתרון מלא בסרטון** אשר תוכלו לצפות בו על מנת להעשיר את הבנתכם. יש לפתור את התרגילים בעצמכם, ורק אם נתקעתם לגשת לסרטון. על מנת לגשת לסרטון תוכלו לסרוק את קוד ה-QR בצידו, או ללחוץ על הקוד במידה ובידיכם עותק דיגיטלי של העבודה.

לעבודה שני חלקים:

החלק הראשון של העבודה מכיל תרגילים מנושאים שנלמדו בכיתה י', המהווים בסיס לנושאים שיילמדו בכיתה י"א.

החלק השני מכיל שני פרקים ללמידה עצמית, פרק האינדוקציה ופרק מתחום הטריגונומטריה שנקרא המעגל הטריגונומטרי, נושאים אותם לומדים בתחילת כיתה י"א. עליכם ללמוד את הפרקים האלה לפני תחילת שנת הלימודים.

בתחילת שנת הלימודים הבאה תיערך בחינה על עבודת הקיץ, כולל שאלות מהפרקים ללמידה עצמית.

חופשה נעימה (:

תוכן העניינים:

פונקציית פולינום:

חקירה:

1) חקרו את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

i. תחום הגדרה.
ii. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
iii. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
iv. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
v. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

סרטון

א. $y=x^4-10x^2+9$

ב. $y=x(x-12)(2x-9)$

ג. $y=(6-x)^8$

סרטון

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^3-3ax^2+54x-50$.

א. לאלו ערכים של הפרמטר a , עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?

ב. הציבו $a=6$ בפונקציה וחקרו אותה לפי הסעיפים הבאים:

תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y , סרטוט.

3) נתונה הפונקציה: $y=(x-3)(2-x)^2$.

א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ב. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה: $y=2x^2(x+a)^2$, $a>-6$.

ידוע שלפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x=4$.

א. מצאו את הפרמטר a וכתבו את הפונקציה.

ב. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון? אם כן, מצאו אותן.

ג. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצאו האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה וכתבו את תחומי החיוביות והשליליות שלה.

פונקציה זוגית ואי זוגית:

סרטון

1) קבעו אלו מהפונקציות הבאות הן זוגיות/אי-זוגיות לא זו ולא זו:

א. $f(x)=3x-5$

ב. $f(x)=3x^2$

ג. $f(x)=2x^3$

ד. $f(x)=x^3-2x^2$

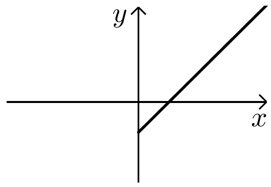
ה. $f(x)=4x^4-3x^2+1$

ו. $f(x)=4x^5-3x^3-1$

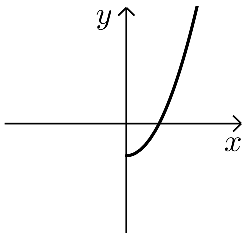
סרטון

2) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלימו את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה זוגית:

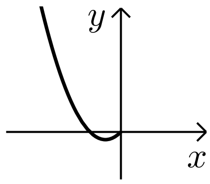
א.



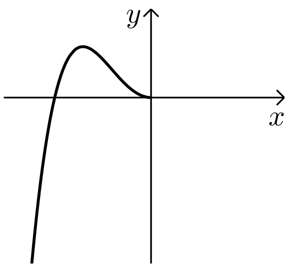
ב.



ג.



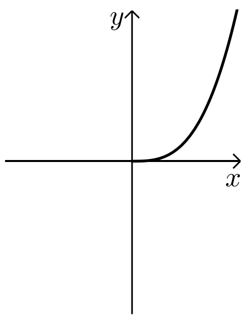
ד.



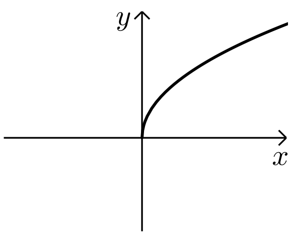
סרטון

3) הפונקציות המסורטטות להלן מוגדרות לכל x.
השלימו את ציור הגרף של הפונקציה כך שתתקבל פונקציה אי-זוגית:

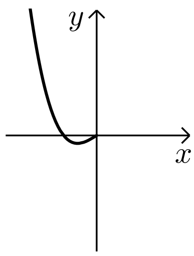
א.



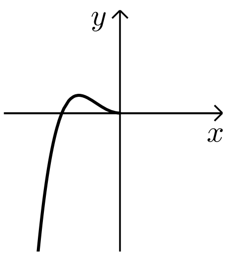
ב.



ג.



ד.



סרטון

4) לפניכם הפונקציה: $f(x)=-2x^6+3x^4+a$, a פרמטר.

ידוע כי לפונקציה ערך מירבי של 1.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה $f(x)$.

ב. חקרו את הפונקציה בתחום: $[-2:0]$ לפי הסעיפים הבאים:

כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,

מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ג. האם הפונקציה היא זוגית? אי-זוגית? לא זה ולא זה?

נמקו באמצעות חישוב מתאים.

ד. הסתמכו על ממצאיכם מהסעיפים הקודמים וסרטטו את גרף הפונקציה בתחום: $[-2:2]$.

סרטון

5) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=3x^3-9x$.

א. חקרו את הפונקציה בתחום: $[0:5]$ לפי הסעיפים הבאים:

כתיבת תחום הגדרה, מציאת נקודות חיתוך עם הצירים,

מציאת נקודות קיצון וסיווגן, כתיבת תחומי עלייה וירידה, סרטוט סקיצה.

ב. הוכיחו כי הפונקציה היא אי-זוגית.

ג. התבססו על ממצאיכם מהסעיפים הקודמים וסרטטו את הפונקציה בתחום: $[-5:5]$ (הוסיפו את סרטוט גרף הפונקציה בתחום $[-5:0]$ לגרף שסרטטתם בסעיף הקודם).

תשובות סופיות:

חקירה:

1) תשובות עבור סעיפים i-iv:

א. i. כל x. ii. $\min\left(\sqrt{5},-16\right)$, $\max\left(0,9\right)$, $\min\left(-\sqrt{5},-16\right)$.

iii. עולה: $x>\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}<x<0$, יורדת: $0<x<\sqrt{5}$, $x<-\sqrt{5}$.

iv. $\left(3,0\right)$, $\left(1,0\right)$, $\left(-1,0\right)$, $\left(-3,0\right)$, $\left(0,9\right)$.

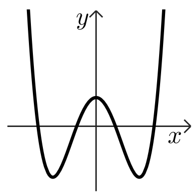
ב. i. כל x. ii. $\min\left(9,-243\right)$, $\max\left(2,100\right)$.

iii. עולה: $x>9$, $x<2$, יורדת: $2<x<9$. iv. $\left(4.5,0\right)$, $\left(12,0\right)$, $\left(0,0\right)$.

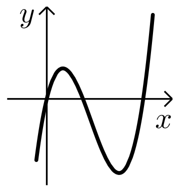
ג. i. כל x. ii. $\min\left(6,0\right)$. iii. עולה: $x>6$ יורדת: $x<6$. iv. $\left(0,6^8\right)$, $\left(6,0\right)$.

סקיצות עבור שאלה 1:

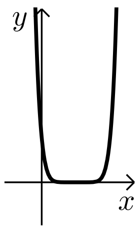
א.



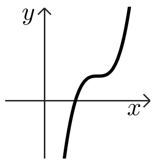
ב.



ג.



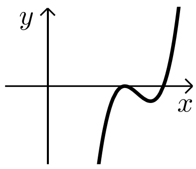
2) א. $-6\le a\le 6$ ב. כל x, אין קיצון, עולה בכל תחום הגדרה, $\left(0,-50\right)$, סקיצה:



ג. עולה: $x>0$, $-2<x<-\frac{1}{4}$, יורדת: $x<-2$, $-\frac{1}{4}<x<0$.

3) א. $\min\left(2\frac{2}{3},-\frac{4}{27}\right)$, $\max\left(2,0\right)$ ב. עולה: $x>2\frac{2}{3}$, $x<2$, יורדת: $2<x<2\frac{2}{3}$.

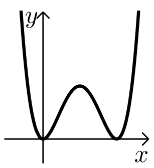
ג. $\left(0,-12\right)$, $\left(2,0\right)$, $\left(3,0\right)$. ד. ראו גרף בצד:



4) א. $a=-4$, $y=2x^2\left(x-4\right)^2$ ב. $\left(4,0\right)$, $\left(2,32\right)$, $\left(0,0\right)$.

ג. עולה: $x>4$, $0<x<2$, יורדת: $2<x<4$, $x<0$.

ד. $\left(0,0\right)$, $\left(4,0\right)$. ה. חיובית: $x\neq 0,4$. ראו גרף צד:



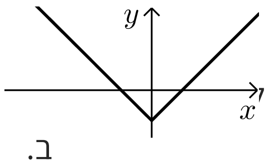
פונקציה זוגית ואי זוגית:

1) זוגית: ב', ה'.   אי-זוגית: ג',   לא זו ולא זו: א', ד', ו'.

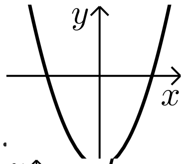
2) להלן הגרפים:

3)

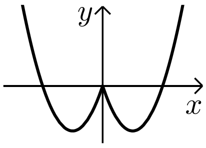
א.



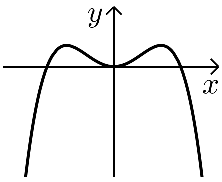
ב.



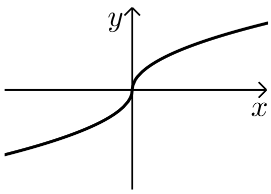
ג.



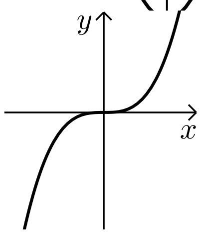
ד.



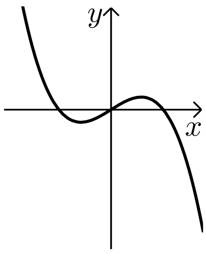
ב.

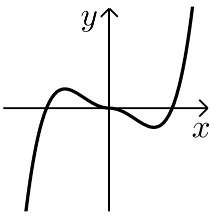


.



ד.



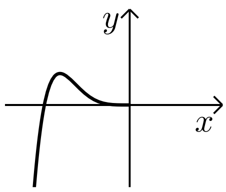


4) א. $a=0$ ב. תחום הגדרה: $-2\le x\le 0$, חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(-1.225,0)$,

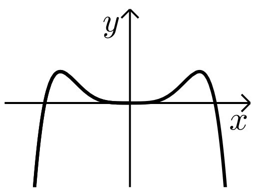
נקודות קיצון: $(-2,-80)$ min קצה, $(-1,1)$ max , $(0,0)$ min קצה.

עולה: $-2<x<-1$, יורדת: $-1<x<0$. ג. זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:



סרטוט עבור סעיף ד:

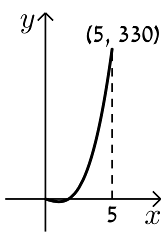


5) א. תחום הגדרה: $0\le x\le 5$, חיתוך עם הצירים: $(\sqrt{3},0)$, $(0,0)$,

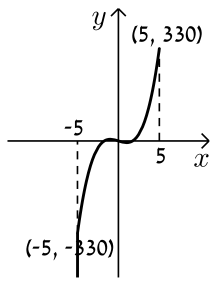
נקודות קיצון: $(5,330)$ max קצה, $(1,-6)$ min , $(0,0)$ max קצה.

עולה: $1<x<5$, יורדת: $0<x<1$,   ב. אי-זוגית.

סרטוט עבור סעיף א:



סרטוט עבור סעיף ג:



פונקציית שורש:

חקירה:

סרטון

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=(x-4)\sqrt{x-1}$. חקרו את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

סרטון

2) נתונה הפונקציה: $f(x)=x\sqrt{6-x}$. חקרו את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

סרטון

3) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, a פרמטר.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y-x=0$.

א. מצאו את ערך הפרמטר a .

ב. כתבו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ד. כתבו את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

סרטון

4) לפניכם שלוש פונקציות: $h(x)=\frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$, $g(x)=\frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$, $f(x)=x^2\sqrt{k-x^2}$, $(k>0)$.

א. קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדיקו את קביעותיכם באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$.

ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה-x כלל.

iii. הפונקציות: $h(x)$ ו-$g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן (כאשר אחת עולה השנייה יורדת).

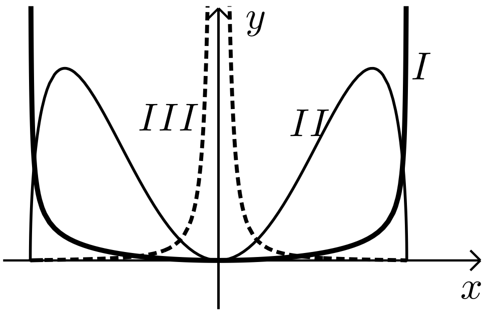
iv. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A(0,\sqrt{12})$ על ציר ה-y. ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x שאינה בראשית הוא: $d=6$.

ב. מצאו את k.

ג. מצאו את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ וקבעו את סוגן.

ד. לפניכם איור ובו מסורטטות הסקיצות של שלושת הפונקציות.
קבעו עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף שייך לכל פונקציה.



תשובות סופיות:

1) א. $x\geq 1$ ב. $\max(1,0)$, $\min(2,-2)$ קצה
ג. עולה: $x>2$, יורדת: $1<x<2$. ד. $(1,0),(4,0)$ ה. אין.

2) א. $x\leq 6$ ב. $\min(6,0)$, $\max(4,4\sqrt{2})$ קצה
ג. עלייה: $x<4$, ירידה: $4<x<6$ ד. $(6,0),(0,0)$.

3) א. $a=1$ ב. $-3<x<3$ ג. $(-1.5,\sqrt{3})$
ד. יורדת: $-3<x<-1.5$, עולה: $-1.5<x<3$.

4) א. i. לא נכון ii. לא נכון iii. נכון iv. לא נכון ב. $k=24$
ג. $\min(0,0)$, $\max(\pm 4,32\sqrt{2})$ ד. $\text{I}=g(x)$, $\text{II}=f(x)$, $\text{III}=h(x)$.

פונקציית מנה:

חקירה:

סרטון

1) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6x^2-10x+6}{3x^2-10x+3}$. חקרו את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.

ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

סרטון

2) לגרף הפונקציה: $f(x)=\frac{ax+4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x=-8$.

א. מצאו את a וכתבו את הפונקציה.

ב. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

סרטון

3) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$, $(a\neq 1)$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. הביעו באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y.

ד. ענו על הסעיפים הבאים:

i. מצאו עבור אילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.

ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$.
מצאו את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x.

סרטון

4) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2-20x+28}{x^2+2a}$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה $(0.5,3)$.

א. מצאו את ערך הפרמטר a וכתבו את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגן.

ג. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. העזרו בגרף הפונקציה וקבעו עבור אלו ערכים של k הישר: $y=k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

תשובות סופיות:

1) א. $x\neq\frac{1}{3}$, $x\neq3$ ב. $\max\left(1,-\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(-1,1\frac{3}{8}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $\frac{1}{3}<x<1$, $-1<x<\frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $x>3$, $1<x<3$ או $x<-1$.

ד. $(0,2)$ ה. $y=2$, $x=\frac{1}{3}$, $x=3$.

2) א. $a=1$, $f(x)=\frac{x+4}{x^2}$ ב. עולה: $-8<x<0$ יורדת: $x>0$, $x<-8$

ג. $(-4,0)$ ד. $y=0$, $x=0$.

3) א. $x\neq1$ ב. $y=1$, $x=1$ ג. $(a,0),(0,a)$ ד. i. $a>1$ ii. $a=2$.

4) א. $a=3$, $f(x)=\frac{3x^2-20x+28}{x^2+6}$, כל x.

ב. $\max(-2,8)$, $\min\left(3,-\frac{1}{3}\right)$ ג. עולה: $x>3$, $x<-2$, יורדת: $-2<x<3$

ד. $(2,0),\left(0,4\frac{2}{3}\right),\left(4\frac{2}{3},0\right)$ ו. 3, $-\frac{1}{3}$, $k=8$.

טרנספורמציות על פונקציות:

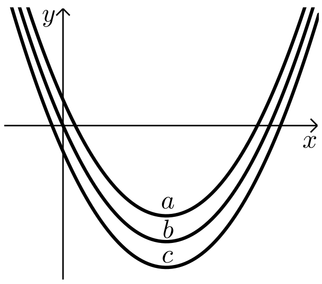
הזזה אנכית:

סרטון

1) סרטטו במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה $f(x)=x^2$ ואת הגרף $y=f(x)+k$ עבור $k=1$ ו- $k=-4$.

סרטון

2) לפניכם שלוש גרפים של פונקציות: $h(x)=x^2-6x+2$, $g(x)=x^2-6x-2$, $f(x)=x^2-6x$.
התאימו כל גרף מבין הגרפים b, a ו- c לכל פונקציה:



סרטון

3) הפונקציה: $f(x)=\sqrt{x}+b$, (b פרמטר) חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=9$.
מצא בכמה יחידות היא נמוכה מהפונקציה: $g(x)=\sqrt{x}$.

מתיחה וכיווץ אנכיים:

סרטון

4) סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:
$h(x)=4x^2$, $g(x)=2x^2$, $f(x)=x^2$.

סרטון

5) סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:
$h(x)=\frac{1}{4}x^2$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)=x^2$.

סרטון

6) סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות:
$h(x)=-\frac{1}{2}x^2$, $g(x)=-2x^2$, $f(x)=x^2$.

סרטון

7) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x)=8-x^3$.

א. מגדירים פונקציה חדשה: $g_1(x)=m\cdot f(x)$, $m>1$.

סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g_1(x)$.

ב. מגדירים פונקציה חדשה: $g_2(x)=m\cdot f(x)$, $0<m<1$.

סרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g_2(x)$.

ג. נסמן ב-A את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y , ב- B_1 את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g_1(x)$ עם ציר ה- y וב- B_2 את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g_2(x)$ עם ציר ה- y.

(1) מצאו את ערך הפרמטר m עבור סעיף א' שמקיים: $y_{B_1}-y_A=24$.

(2) מצאו את ערך הפרמטר m עבור סעיף ב' שמקיים: $y_A-y_{B_2}=4$.

הזזה אופקית:

סרטון

8) לפניכם הפונקציה: $f(x)=x^2$.

סרטטו במערכת צירים אחת את גרף הפונקציה $f(x)$ ואת הגרפים של הפונקציות: $g(x)=f(x-2)$ ו- $h(x)=f(x+3)$.

סרטון

9) נתונה פונקציה $f(x)=x^2$. מזיזים את הפונקציה ומקבלים: $g(x)=f(x+a)+b$

כאשר a ו- b הם פרמטרים השונים מאפס.

א. מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b אם ידוע כי: $g(x)=x^2+2x$.

ב. מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b אם ידוע כי: $g(x)=x^2-4x+7$.

סרטון

10) מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ 5 יחידות ימינה כך שמתקבלת הפונקציה $g(x)$.

א. כתבו באופן מפורש את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו בכמה יחידות יש להזיז את גרף הפונקציה $f(x)$ <u>**שמאלה**</u> על מנת שיחתוך את ציר ה- y בנקודה שבה $y=1$.

מתיחה וכיווץ אופקיים:

סרטון

11) נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2$. כתבו באופן מפורש וסרטטו במערכת צירים אחת את הפונקציות הבאות: $g(x)=f(2x)$, $h(x)=f(x/2)$.

סרטון

12) הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x^4-8x}{16}$ חותכת את ציר ה- x בחלקו החיובי בנקודה A.
מצאו כיווץ של הפונקציה כך ששיעורי הנקודה A יהיו $(1,0)$.

סרטון

13) נתונה הפונקציה: $f(x)=6x-x^2$. רוצים לכווץ אותה פי k כך שנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x שאינה ראשית הצירים תקטן פי 3. נסמן את הפונקציה המכווצת ב- g.

א. מצאו את ערכו של הפרמטר k.

ב. כתבו את הפונקציה המכווצת $g(x)$ בצורה מפורשת.

ג. סרטטו את הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ באותה מערכת צירים.

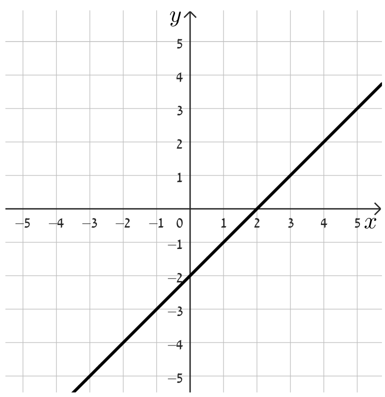
ד. הראו כיצד משתנה נקודת הקיצון במקרה זה.

פונקציה בריבוע:

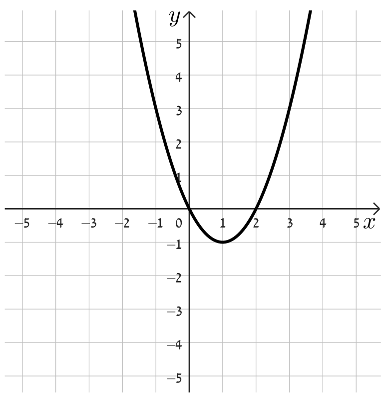
סרטון

14) בכל אחד מן הסעיפים הבאים נתונה פונקציה $f(x)$.
יש לסרטט באותה מערכת הצירים את הפונקציה $g(x)=\left(f(x)\right)^2$.

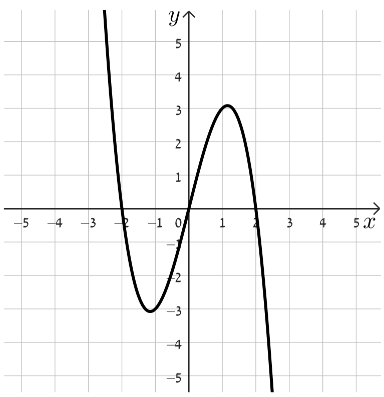
א. $f(x)=x-2$



ב. $f(x)=x^2-2x$

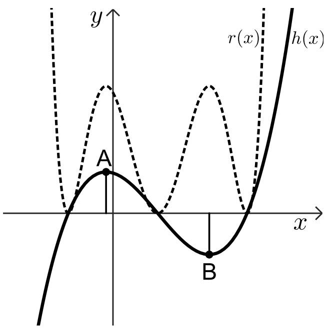


ג. $f(x)=4x-x^3$



15) באיור שלפניכם מופיעות שתי פונקציות: $h(x)$ (קו רציף) ו- $r(x)$ (קו מקווקו).

סרטון



ידוע כי פונקציה אחת היא הריבוע של הפונקציה השנייה.

א. קבעו מי מבין הפונקציות $h(x)$ ו- $r(x)$ היא ריבוע של השנייה.

נקודות הקיצון של הפונקציה המתוארת ע"י קו רציף מסומנות ב-A וב-B. כמו כן, ידוע כי הפונקציה הרציפה חותכת את ציר ה- x בנקודות שבהן: $x=3$, $x=1$, $x=-1$.

שיעור ה- x של הנקודה A, x_A, נמצא בין $x=-1$ ל- $x=1$,

ושיעור ה- x של הנקודה B, x_B, נמצא בין $x=1$ ל- $x=3$.

הוסיפו את נקודות החיתוך לסרטוט וענו על הסעיפים הבאים:

ב. (1) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה עם העקום המתואר ע"י קו רציף?

(2) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה עם העקום המתואר ע"י קו מקווקו?

ג. על סמך ממצאיכם מהסעיף הקודם האם נכון לומר כי תחומי העלייה והירידה של פונקציה בריבוע תמיד יהיו הפוכים מתחומי העלייה והירידה של הפונקציה המקורית? נמקו.

ידוע כי הנקודה A נמצאת על הישר $y=3$ וכי הנקודה B נמצאת על הישר $y=-3$.

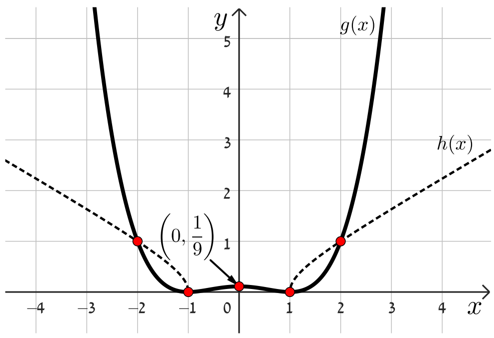
ד. מה הוא שיעור ה- y של כל אחת מנקודות הקיצון על גרף הפונקציה המקווקות?

ה. בכמה נקודות יחתוך הישר $y=4$ את גרף הפונקציה המקווקוות?

16) נתונה הפונקציה $f(x)$ ולה מגדירים את הפונקציות: $g(x)=(f(x))^2$ ו- $h(x)=\sqrt{f(x)}$.

סרטון

באיור שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$.



א. מה הן נקודות האפס של הפונקציה $f(x)$?

ב. האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? אם כן, מה הן ומה הוא סוגן?

ג. היעזרו בסרטוט וכתבו שתי נקודות, שאינן נקודות האפס, וגרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרכן.

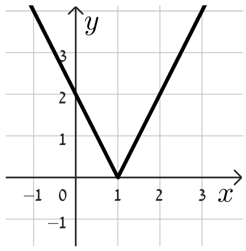
ד. ידוע כי $f(x)=ax^2+c$, כאשר $a\neq 0$.

מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- c וכתבו את הפונקציה $f(x)$.

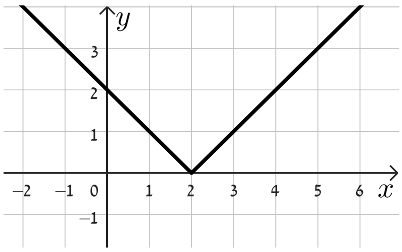
ערך מוחלט של פונקציה:

סרטון

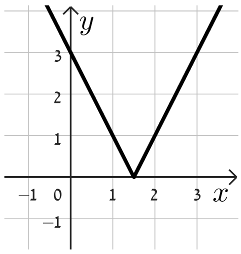
17) לפניכם שלושה גרפים של פונקציות מהצורה: $y=|ax+b|$,
התאימו לכל גרף את הפונקציה המתאימה לו: I. $y=|x-2|$, II. $y=|2x-2|$, III. $y=|2x-3|$.



(1)



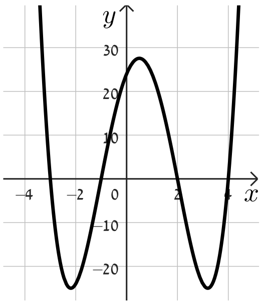
(2)



(3)

סרטון

18) באיור מופיע גרף הפונקציה $f(x)$ שהיא מוגדרת ורציפה לכל x.



שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן:

$\min(-2.2,-25)$, $\max(0.6,27)$, $\min(3.1,-25)$

ונקודות החיתוך שלה עם הצירים הן:

$(-3,0)$, $(-1,0)$, $(2,0)$, $(4,0)$, $(0,24)$

א. יהי $g(x)=|f(x)|$.

(1) סרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.

(2) ציינו בגרף את נקודות הקיצון של $g(x)$.

ב. פתרו את אי השוויון: $g(x)>f(x)$.

ג. כמה פתרונות יש למשוואה $g(x)=15$?

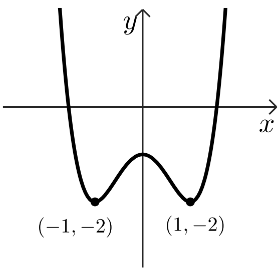
(1) 2 פתרונות. (2) 4 פתרונות. (3) 6 פתרונות. (4) 8 פתרונות.

ד. מגדירים פונקציה נוספת: $h(x)=g(x)+c$.

עבור איזה ערך של הקבוע c, הגרף של הפונקציה h יחתוך את ציר ה-x בדיוק 3 פעמים?

סרטון

19) לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$.



קבעו לאילו מבין הערכים הבאים של a מתקיים:

$f(x)-a=|f(x)-a|$.

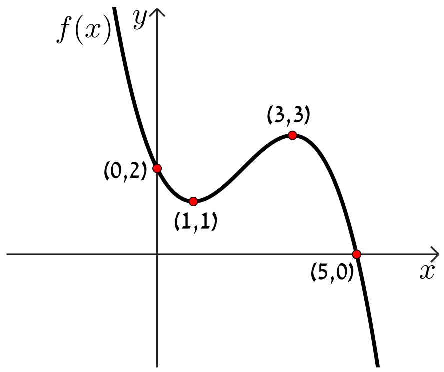
בחרו את התשובה הנכונה (תיתכן יותר מתשובה נכונה אחת):

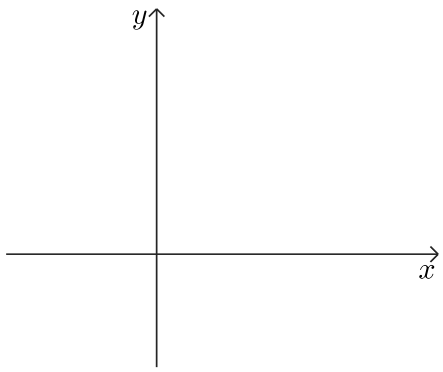
$a=5$, $a=3$, $a=-1$, $a=-2$, $a=-3$.

פונקציה הופכית:

סרטון

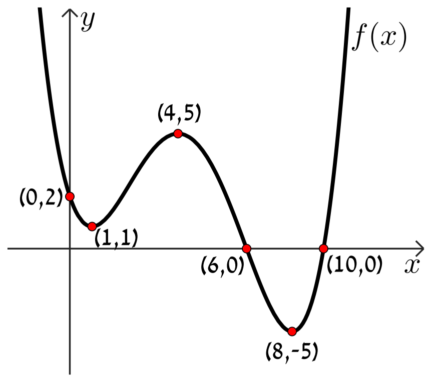
20) סרטטו את הגרף של הפונקציה ההופכית לפונקציה $f(x)$ הנתונה במערכת הצירים הבאה:

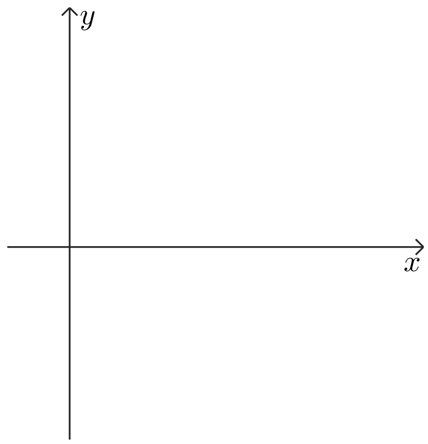




סרטון

21) סרטטו את הגרף של הפונקציה ההופכית לפונקציה $f(x)$ הנתונה במערכת הצירים הבאה:





סרטון

22) נתונה הפונקציה: $f(x)=2x^2+5x-3$. מגדירים את הפונקציה ההופכית לה: $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

א. (1) מה הן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$?

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ וציינו את האסימפטוטות שלה.

ב. מזיזים אופקית את גרף הפונקציה $g(x)$ כך שאחת מן האסימפטוטות שלו תתלכדנה עם ציר ה- y . כיצד תיראה הפונקציה $f(x)$ במקרה זה? (הבחינו בין שני מקרים).

ג. בכמה יחידות יש להזיז אנכית את הפונקציה $f(x)$ על מנת שהפונקציה $g(x)$ תהיה מוגדרת לכל x ?

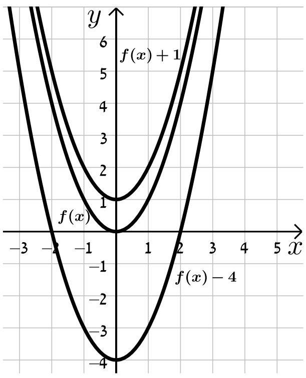
ד. מגדירים פונקציה: $h(x)=f(k\cdot x)$.

(1) מצאו את k עבורו המרחק בין האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $\dfrac{1}{h(x)}$ יהיה 7.

(2) כתבו את משוואות האסימפטוטות האנכיות לפונקציה $\dfrac{1}{h(x)}$.

תשובות סופיות:

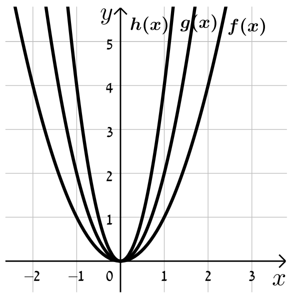
1) ראו סרטוט בצד:



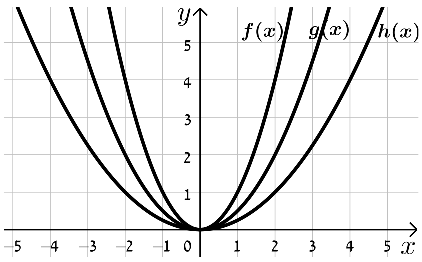
2) ההתאמה: $h(x)\to a$, $g(x)\to c$, $f(x)\to b$.

3) 3 יחידות.

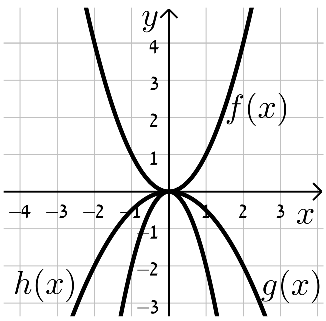
4) להלן סרטוט:



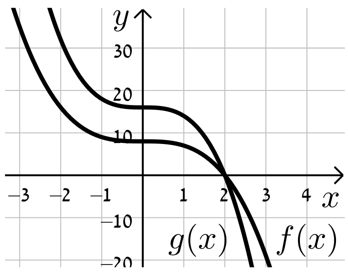
5) להלן סרטוט:



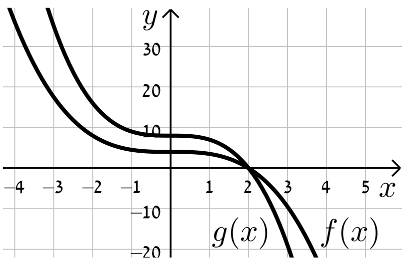
6) להלן סרטוט:



7) א. להלן סרטוט:

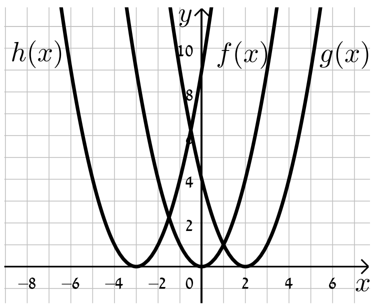


ב. להלן סרטוט:



ג. (1) $m=4$ ג. (2) $k=\frac{1}{2}$.

8) ראו סרטוט בצד:



9) א. $a=1$, $b=-1$ ב. $a=-2$, $b=3$.

10) א. $g(x)=\sqrt{x-5}$ ב. 1 .

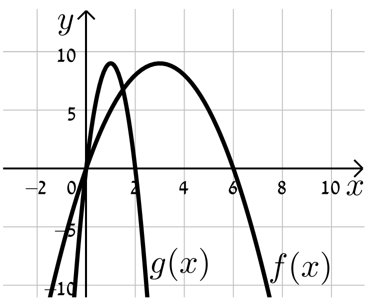
11) $h(x)=\frac{x^2}{4}$, $g(x)=4x^2$.

12) $f(2x)=x^4-x$.

13) א. $k=3$

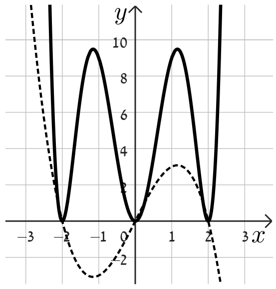
ב. $g(x)=18x-9x^2$

ג. ראו סרטוט בצד:



ד. ערך ה- x של נקודת הקיצון מתכווץ פי 3 (במקום $\max(3,9)$ הופך ל- $\max(1,9)$).

14) להלן סרטוטים:



15) א. $r(x)=\left(h(x)\right)^2$ ב. (1) עולה: $x>x_B$, $x<x_A$ יורדת: $x_A<x<x_B$

ב. (2) עולה: $x>3$, $1<x<x_B$, $-1<x<x_A$ יורדת: $x_B<x<3$, $x_A<x<1$, $x<-1$.

ג. לא. ד. $y=9$ ה. 6 נקודות חיתוך שונות.

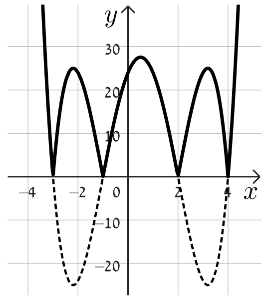
16) א. $(1,0)$, $(-1,0)$ ב. כן, $\min\left(0,-\frac{1}{3}\right)$ ג. $(2,1)$, $(-2,1)$ ד. $c=-\frac{1}{3}$, $a=\frac{1}{3}$

17) I. מתאים לגרף 2. II. מתאים לגרף 1. III. מתאים לגרף 3.

18) א. (1) להלן סרטוט: א. (2) $\min:(4,0),(2,0),(-1,0),(-3,0)$,

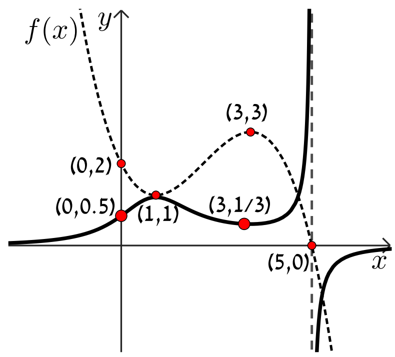
$\max:(3.1,25),(0.6,27),(-2.2,25)$

ב. $2<x<4$, $-3<x<-1$ ג. (4). ד. $c=-27$.

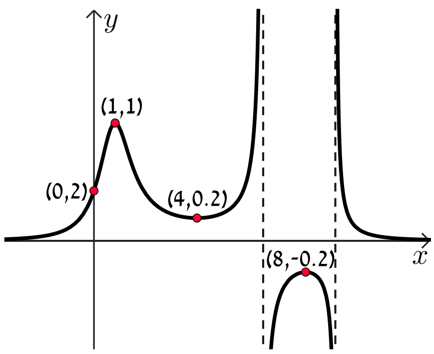


19) $a=-2$, $a=-3$.

20) להלן סרטוט



21) להלן סרטוט



22) א. (1) $x=\frac{1}{2}$, $x=-3$ ב. $f(x)=2x^2+7x$ ג. ל-$g(x)$ לא תהיינה אסימפטוטות.

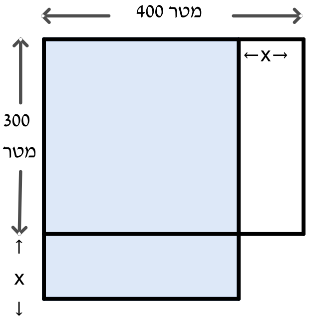
ד. (1) $k=0.5$ ד. (2) $x=-6$, $x=1$.

בעיות קיצון:

בעיות קיצון בפונקצית פולינום:

יישומון

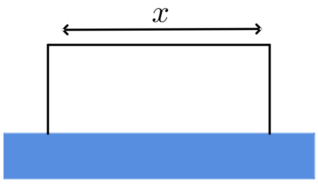
1) לדני יש חלקת אדמה מלבנית שאורכה 300 מטר ורוחבה 400 מטר.
דני רצה להגדיל את אורך החלקה ולהקטין את רוחבה
כך שהשטח שלה יהיה מקסימלי וההיקף שלה לא ישתנה.
נסמן את מספר המטרים שדני מוסיף לאורך ומוריד מהרוחב ב–x מטר.



א. היעזרו ביישומון ובדקו כיצד שינוי באורך של x, משפיע על שטח החלקה החדשה המתקבלת.
ב. בטאו באמצעות x את שטח החלקה החדשה – זו פונקציית המטרה.
ג. גזרו את הפונקציה ומצאו את הערך של x עבורו לפונקציית המטרה יש נקודות מקסימום.
ד. מצאו את שטח החלקה המקסימלי והשוו לגדלים המתקבלים ביישומון.

יישומון

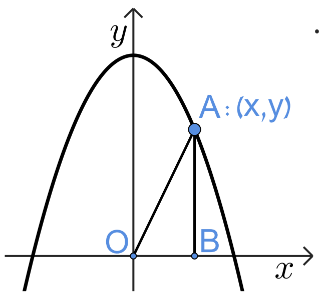
2) לאורי גדר תיל באורך 200 מטר, אורי רוצה להשתמש בגדר כדי לגדר חלקת אדמה בצורת האות ח' בחזית ביתו וליצור בה גינת פרחים. מה צריך להיות אורך הגדר כך ששטח גינת הפרחים יהיה מקסימלי. נסמן ב–x את רוחב גינת הפרחים.



א. היעזרו ביישומון ותארו כיצד משפיע רוחב גינת הפרחים על שיטחה.
ב. בטאו באמצעות x את שטח גינת הפרחים.
ג. מצאו את הערך של x עבורו שטח הגינה יהיה מקסימלי.

יישומון

3) נקודה A הנמצאות ברביע הראשון על גרף על הפרבולה $y=-x^2+4$.
מנקודה A הורידו אנך לציר ה-x שחותך אותו בנקודה B.
הישר AO מחבר את הנקודה A עם ראשית הצירים (O).
כך שנוצר משולש ישר זווית ABO.
היעזרו ביישומון וענו על הסעיפים הבאים:



א. טיילו עם הנקודה A לאורך הפרבולה (ברביע הראשון), מה קורה לשטח המשולש שנוצר?
ב. נסמן את שיעור ה-x של נקודה A באות t.
הביעו באמצעות t את שטח המשולש ABO, מה תחום ההגדרה של t?
ג. מבין כל המשולשים ישרי הזווית מצאו את t עבורו מתקבל המשולש בעל השטח המקסימלי.

4) נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)=x^2+2$ מנקודה A הורידו אנך לציר ה-x החותך את גרף הפונקציה $g(x)=-x^2+2x-4$ בנקודה B.

יישומון

היעזרו ביישומון ועני על השאלות הבאות:

א. "טיילו" עם הנקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$.

כיצד משפיע מיקום הנקודה על אורך הקטע AB?

ב. נסמן את שיעור ה-x של נקודה A באות t.

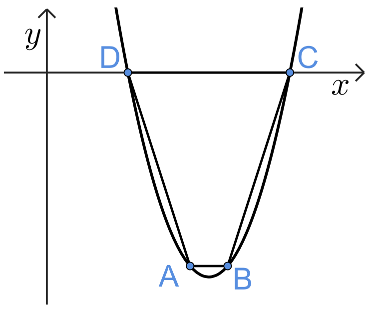
הביעו באמצעות t את שיעורי הנקודות A ו-B.

ג. הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB (פונקציית מטרה).

ד. מצאו את הערך של t עבורו האורך של AB הוא מינימלי.

5) נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)=x^2-16x+48$ ברביע הרביעי.

מנקודה A מעבירים ישר מקביל לציר ה-x ושחותך את גרף הפונקציה בנקודה B. מחברים את הנקודות A ו-B עם הנקודות D ו-C שהן נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x (ראו סרטוט).



א. נסמן את שיעור ה-x של נקודה A באות t.

הביעו באמצעות t (במידת הצורך) את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

ב. מצאו את משוואת ציר הסימטריה של הפונקציה.

ג. הביעו באמצעות t (במידת הצורך) את אורך הקטעים AB ו-DC.

ד. מה תחום הערכים ש-t יכול לקבל?

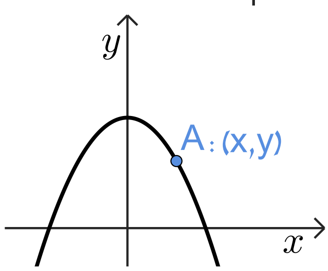
ה. הביעו באמצעות t את גובה הטרפז.

ו. האם אורך גובה הטרפז שווה לשיעור ה-y של הנקודה A?

ז. הביעו את שטח הטרפז שנוצר באמצעות t.

ח. מצאו את שטח הטרפז המקסימלי (עד שתי ספרות אחרי הנקודה).

6) על גרף הפרבולה $y=-x^2+2$ ברביע הראשון (כולל הצירים) בוחרים נקודה A.



א. מה תחום הערכים של x שמתאים לתנאי הבעיה?

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A עבורה סכום ריבועי שיעורי הנקודה הוא מקסימלי.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A עבורה סכום ריבועי שיעורי הנקודה הוא מינימלי.

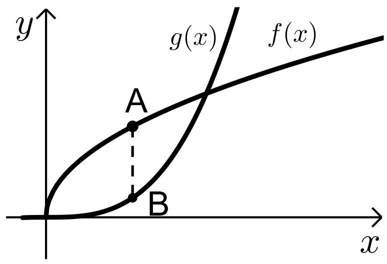
בעיות קיצון בפונקציית שורש:

סרטון

1) נתונות הפונקציות $f\left(x\right)=2\sqrt{x}$ ו- $g\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{3}$.

את הנקודה A שעל $f\left(x\right)$ חיברו עם הנקודה B, שנמצאות מתחתיה על $g\left(x\right)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?



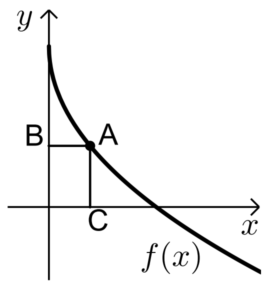
סרטון

2) באיור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה: $f\left(x\right)=6-3\sqrt{x}$.

הנקודה A נמצאות על גרף הפונקציה ברביע הראשון.
מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C כמתואר באיור.
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t.

א. הביעו באמצעות t את סכום הקטעים AC+AB.

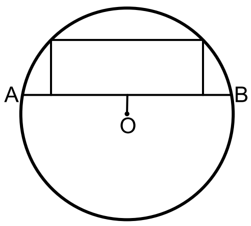
ב. מצאו את ערכו של t עבור סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי.



סרטון

3) במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB שמרחקו ממרכז המעגל הוא a.

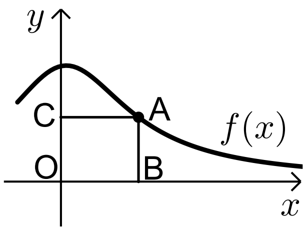
במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בסרטוט.
מצאו את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



בעיות קיצון בפונקציית מנה:

סרטון

1) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=\dfrac{x+12}{x^2+3}$ בתחום: $x\geq 0$.



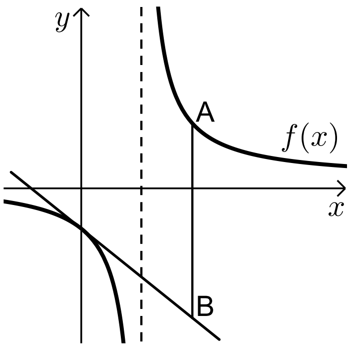
מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABCO כמתואר באיור.

א. מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.

סרטון

2) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=\dfrac{x+10}{x-2}$.



מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

א. מצאו את משוואת המשיק.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ ברביע הראשון ו-B על גרף המשיק כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.

ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?

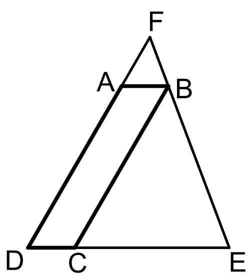
סרטון

3) נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^3}$.

מצאו שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.

סרטון

4) המרובע ABCD הוא מקבילית.



מהקודקוד B מעבירים את הצלע EF הנפגשת עם המשכי הצלעות DC ו-AD.

ידוע כי מידות המקבילית הן: 2 ס"מ $=\mathrm{AB}$, 8 ס"מ $=\mathrm{AD}$.

מסמנים את אורך הצלע DE ב- x .

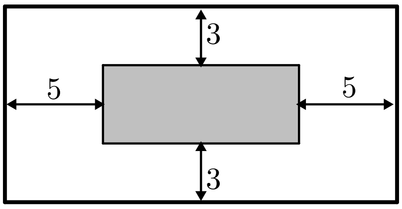
א. הביעו באמצעות x את אורך הצלע DF.

ב. מצאו את x עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.

ג. מה הוא הסכום המינימלי?

סרטון

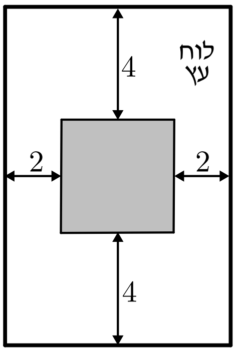
5) חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ".
תפקידו של חיים הוא להדביק גלויות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצדי הקרטון (ראה איור).
יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גלויות במידות שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר.
מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?".



א. עזרו לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראו דרך חישוב.
ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

סרטון

6) אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת מלבנית לתמונה מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון - 4 ס"מ (ראה איור).
כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן).



א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה?
ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?

תשובות סופיות:

בעיות קיצון בפונקציית פולינום:

1) ב. $f(x)=(400-x)\cdot(300+x)$ ג. $x=50$ ד. 122,500 מ"ר.

2) ב. $f(x)=\left(\frac{200-x}{2}\right)\cdot x$ ג. $x=100$

3) ב. $\frac{1}{2}\cdot(-t^3+4t)$, $0<t<2$ ג. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

4) ב. $A(t,t^2+2)$, $B(t,-t^2+2t-4)$ ג. $f(t)=2t^2-2t+6$ ד. $t=\frac{1}{2}$.

5) א. $C(12,0)$, $D(4,0)$, $A(16-t,t^2-16t+48)$, $A(t,t^2-16t+48)$
ב. $x=8$ ג. $AB=16-2t$, $DC=8$
ד. $4<t<8$ ה. $-t^2+16t-48$ ו. לא.
ז. $\frac{(24-2t)\cdot(-t^2+16t-48)}{2}$ ח. 75.85 יח"ר.

6) א. $0\le x\le\sqrt{2}$ ב. $A(0,2)$ ג. $A\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{2}\right)$

בעיות קיצון בפונקציית שורש:

1) $A(1,2)$.

2) א. $l=t+6-3\sqrt{t}$ ב. $t=2.25$.

3) $2\sqrt{5}R-2a$ יחידות אורך.

בעיות קיצון בפונקציית מנה:

1) א. $A(2,2)$ ב. $A(0,4)$.

2) א. $y=-3x-5$ ב. $A(4,7)$ ג. $AB=24$.

3) $\left(\sqrt{3},\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$.

4) א. $DF=\frac{8x}{x-2}$ ב. $x=6$, $L=\frac{x^2+6x}{x-2}$ ג. $L=18$.

5) א. 6 ס"מ על 10 ס"מ ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ.

6) א. 11 ס"מ על 22 ס"מ ב. $S=98$.

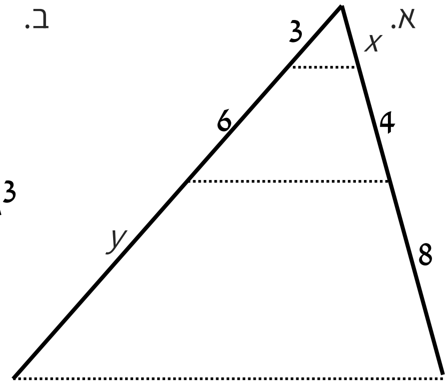
גיאומטריה - פרופורציה ודמיון:

משפט תאלס:

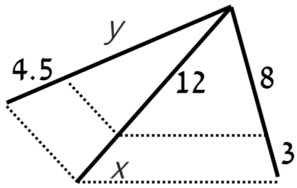
סרטון

1) חשבו את אורכי הקטעים x ו- y בסרטוטים שלפניכם (הקטעים המקווקוים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

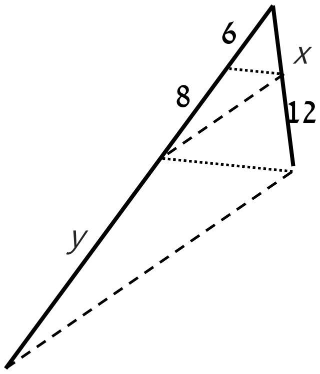
א.



ב.



ג.



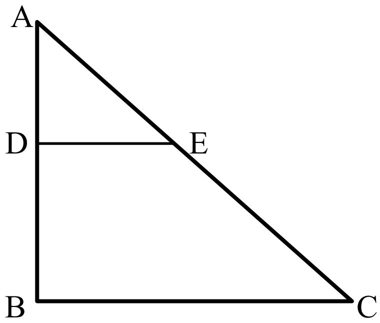
סרטון

2) במשולש שלפניכם נתון $DE \parallel BC$.

כמו כן: $\sphericalangle ADE = 90°$

וכן: AE = BD = 10 ס"מ, 8 ס"מ = DE.

מצאו את אורכי הקטעים AD, CE ו-BC.



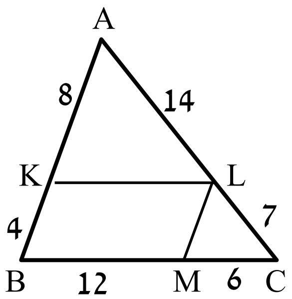
סרטון

3) מרובע KLMB חסום במשולש ABC.

הנתונים המספריים רשומים בסרטוט.

כל המידות הן בס"מ.

הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

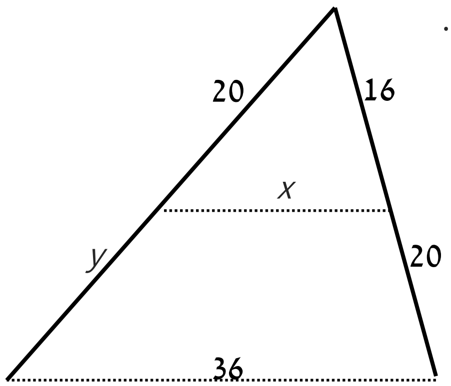


סרטון

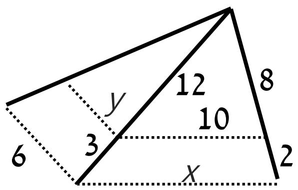
4) חשבו את x ואת y בסרטוטים שלפניכם

(הקטעים המקווקוים מתארים ישרים המקבילים זה לזה). כל המידות נתונות בס"מ:

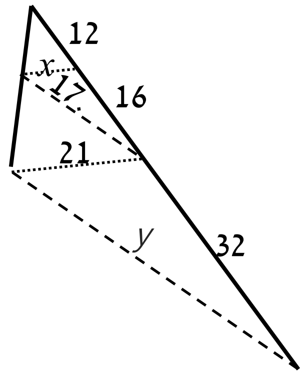
א.



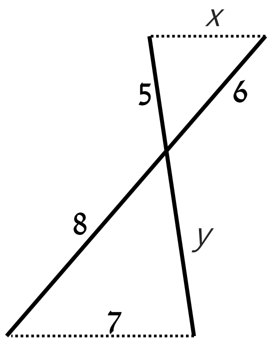
ב.



ג.



ד.



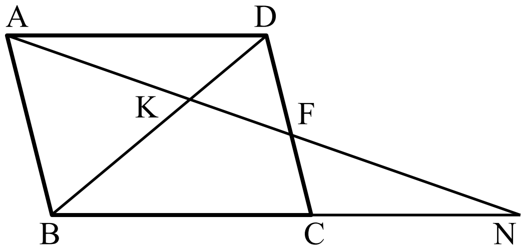
סרטון

5) במקבילית ABCD מעבירים ישר דרך הנקודה A החותך את הצלע CD בנקודה F ונפגש עם המשך BC בנקודה N.

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $\frac{AK}{KF}=\frac{NK}{AK}$.

ב. $\frac{DF}{CF}=\frac{BC}{CN}$.



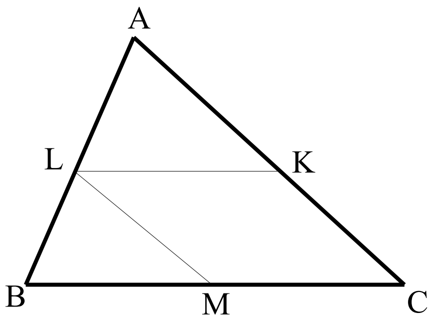
סרטון

6) בסרטוט נתון: $\frac{AL}{BL}=\frac{CM}{BM}=\frac{AK}{CK}$.

א. הוכיחו: המרובע KLMC הוא מקבילית.

ב. נתון: $AL=1.5BL$, BC = 10 ס"מ.

חשבו את אורך הקטע LK.



סרטון

7) במשולש ABC מעבירים את התיכונים BD ו-CE אשר נפגשים בנקודה M.

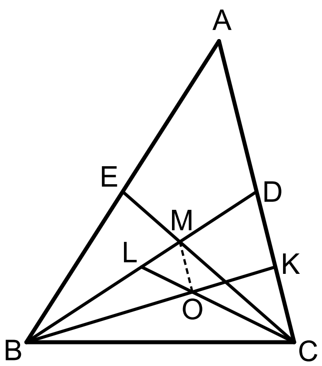
במשולש BDC מעבירים את התיכונים CL ו-BK הנפגשים בנקודה O.

א. הוכיחו כי: $3LM=BL$.

ב. הוכיחו כי: $AC \parallel MO$.

ג. נתון: $S_{BLC}=27$.

חשבו את שטח המשולש MOL.



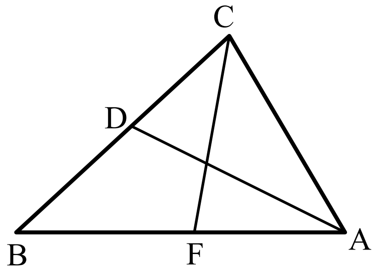
משפט חוצה הזווית:

סרטון

1) הקטעים AD ו-CF הם חוצי הזווית A ו-C בהתאמה במשולש ABC.

נתון: $AB=$ 18 ס"מ, $AC=$ 12 ס"מ, $CD=$ 6 ס"מ.

חשבו את אורך הקטע AF.



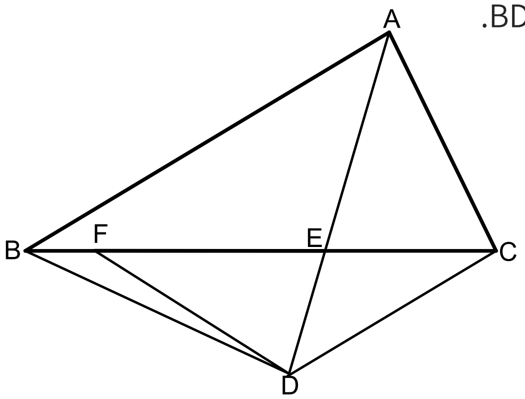
סרטון

2) נתון משולש ABC. הקטע AE חוצה את זווית A של המשולש.

ממשיכים את AE עד לנקודה D כך שנוצר המשולש BDC.

F היא נקודה על הצלע BC המקיימת: $DF=FE=DC$.

הצלע AB מקבילה לצלע DC.



א. הוכיחו כי: $AC=EF$.

ב. הוכיחו: $\frac{AB}{BE}=\frac{FE}{CE}$.

ג. מסמנים נקודה G על AB ומחברים אותה עם הנקודה D כך ש- $DG \parallel AC$.

ד. הוכיחו כי המרובע ACDG הוא מעוין.

ה. הוכיחו: $\frac{AB}{BE}=\frac{AG}{CE}$.

סרטון

3) נתון משולש ABC.

ממשיכים את הצלע AC מהכיוון של C עד לנקודה D.

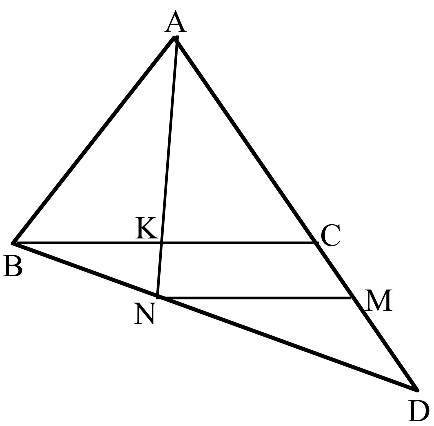
מחברים את הנקודה D עם הקודקוד B.

מעבירים את הקטע AK אשר חוצה את זווית A במשולש ABC.

המשך AK חותך את BD בנקודה N.

מעבירים את הקטע MN. נתון: $MN \parallel BC$.

הוכיחו: $\frac{AB}{AD}=\frac{CM}{DM}$.



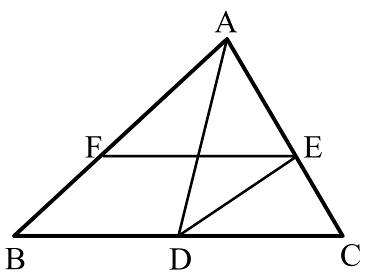
סרטון

4) נתון משולש ABC. מעבירים את התיכון AD לצלע BC.

נתון כי DE הוא חוצה זווית $\sphericalangle ADC$

וכי DF הוא חוצה זווית $\sphericalangle ADB$.

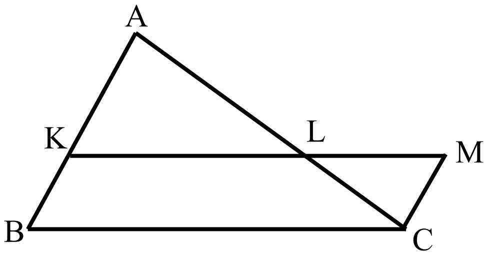
הוכיחו: $EF \parallel BC$.



דמיון משולשים:

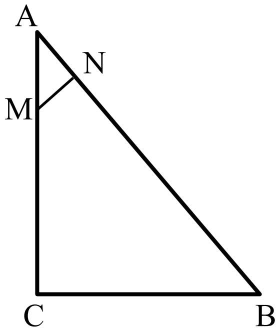
סרטון

1) נתונה מקבילית BKMC.
המשיכו את הצלע BK עד לנקודה A.
הקטע AC חותך את הצלע KM בנקודה L.
הוכיחו: $LC \cdot BC = LM \cdot AC$.



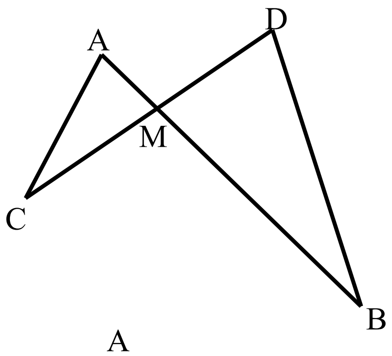
סרטון

2) המשולש ABC הוא ישר זווית $(\sphericalangle C = 90°)$.
מנקודה M שעל הניצב AC העלו אנך NM ליתר AB.
נתון כי: AB = 20 ס"מ, AN = 4 ס"מ, BC = 12 ס"מ.
מצאו את אורך הקטע AM.



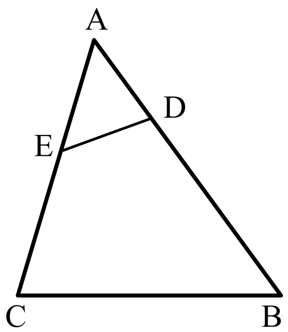
סרטון

3) הישרים AB ו-CD נפגשים בנקודה M.
אורכי הקטעים הם: AM = 3 ס"מ,
BM = 10 ס"מ, CM = 6 ס"מ, DM = 5 ס"מ.
א. הוכיחו כי: $\Delta AMC \sim \Delta DMB$.
ב. האם $BD \parallel AC$? נמקו.
ג. מצאו את אורכו של AC
אם נתון כי BD שווה ל-14 ס"מ.



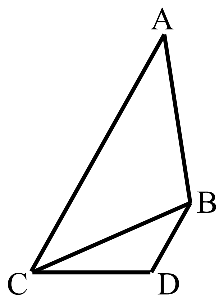
סרטון

4) לפניכם משולש ABC.
מעבירים את הקטע DE אשר יוצר את הגדלים הבאים:
AD = 4 ס"מ, BD = 11 ס"מ, AE = 5 ס"מ, CE = 7 ס"מ.
א. הוכיחו כי: $\Delta ADE \sim \Delta ACB$.
ב. הוכיחו כי את המרובע BCED אפשר לחסום במעגל.



סרטון

5) נתונים המשולשים ABC ו-BDC.
ידוע כי: AC = 16 ס"מ, AB = 10 ס"מ,
BC = 8 ס"מ, DC = 5 ס"מ, BD = 4 ס"מ.
א. הוכיחו כי שני המשולשים דומים ורשמו
אותם לפי סדר התאמת קודקודיהם.
ב. הוכיחו כי: $AC \parallel BD$.



סרטון

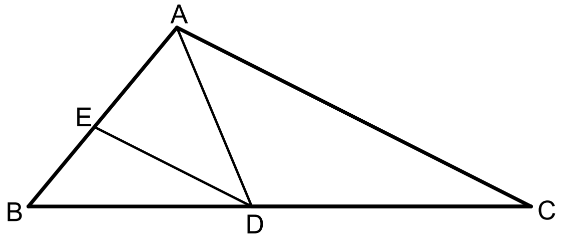
6) במשולש ABC הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות BC ו-AB בהתאמה.

נתון כי: $DE \parallel AC$, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BED$.

א. הוכיחו: $AD \cdot BD = AB \cdot DE$.

ב. ידוע כי הנקודה D מחלקת את הצלע BC באופן הבא: $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$

וכי: $AD \cdot BD = 16$. חשבו את המכפלה: $AB \cdot AC$.



סרטון

7) מהקודקוד C של המשולש BCD מעבירים את הקטע AC כך שהמשולש ACD הוא שווה שוקיים $(AC = AD)$.

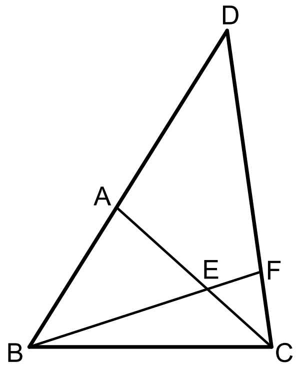
הנקודה F נמצאת על הצלע CD כך שמתקיים:

$3 \cdot \sphericalangle ACD = \sphericalangle BEC$, $\sphericalangle D = \sphericalangle CBF$.

א. הוכיחו כי הקטע BF חוצה את זווית $\sphericalangle B$.

ב. הוכיחו כי: $\Delta AEB \sim \Delta FEC$.

ג. הוכיחו כי: $\frac{BE}{BC} = \frac{AE}{FC}$.



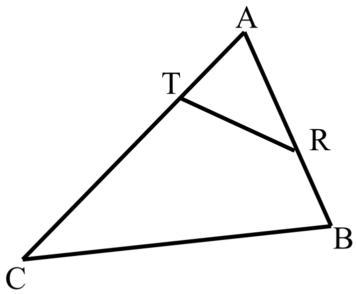
סרטון

8) בסרטוט שלפניכם נתון משולש ABC ובו קטע RT כך שמתקיימים האורכים הבאים:

4 ס"מ = BR, 4 ס"מ = AT, 6 ס"מ = AR,

11 ס"מ = CT, 60 סמ"ר = S_{ABC}.

מצאו את שטח המרובע RTCB.



סרטון

9) נתון משולש ABC. על הצלע BC של המשולש ABC בונים משולש נוסף BDC.

הצלעות DC ו-AB נחתכות בנקודה M.

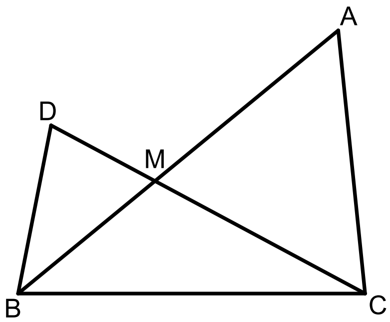
הצלע AB חוצה את זווית B וידוע כי: $2\sphericalangle ACD = \sphericalangle B$.

א. הוכיחו: $\Delta ACM \sim \Delta DBM$.

ב. הוכיחו: $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{CM}$.

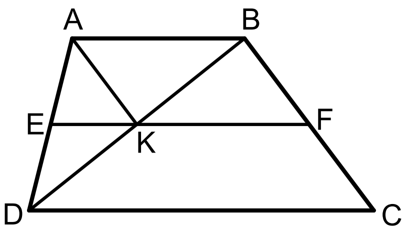
ג. נתון כי: $\frac{AM}{CM} = \frac{8}{5}$ וכי אורך הצלע BD הוא 6 ס"מ. סכום הצלעות AC ו-BC הוא 19.5 ס"מ.

חשבו את היחס: $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}}$.



סרטון

10) המרובע ABCD הוא טרפז, $(AB \parallel CD)$.
מעבירים את קטע האמצעים EF החותך
את אלכסון הטרפז BD בנקודה K.
ידוע כי הקטע AK מקביל לשוק BC של הטרפז.
א. הוכיחו כי המרובע ABFK הוא מקבילית.
ב. נסמן: $S_{BKF} = S$.
הביעו באמצעות S את שטח הטרפז ABCD.



תשובות סופיות:

משפט תאלס:

1) א. $x = 2 , y = 12$ ב. $x = 4.5 , y = 12$ ג. $x = 9 , y = 18\frac{2}{3}$.

2) AD = 6 ס"מ, BC = $21\frac{1}{3}$ ס"מ, CE = $16\frac{2}{3}$ ס"מ. **3)** שאלת הוכחה.

4) א. $x = 16 , y = 25$ ב. $x = 12.5 , y = 4.8$ ג. $x = 9 , y = 37.5$ ד. $x = 5.25 , y = 6\frac{2}{3}$

5) שאלת הוכחה.

6) א. שאלת הוכחה. ב. 6 ס"מ.

7) שאלת הוכחה.

משפט חוצה זווית:

1) 8 ס"מ.

דמיון משולשים:

1) שאלת הוכחה. **2)** 5 ס"מ.

3) א. שאלת הוכחה ב. לא. ג. 8.4 ס"מ.

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

5) א. $\Delta ABC \sim \Delta CDB$ ב. שאלת הוכחה.

6) א. שאלת הוכחה. ב. $AB \cdot AC = 36$

7) שאלת הוכחה.

8) 50.4 סמ"ר.

9) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}} = 0.8$

10) א. שאלת הוכחה. ב. $6S$

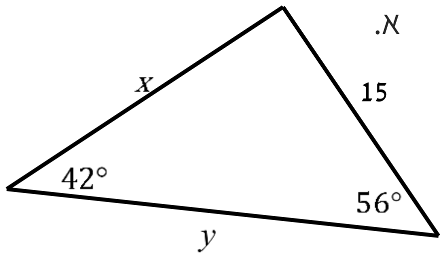
טריגונומטריה במישור:

משפט הסינוסים והקוסינוסים:

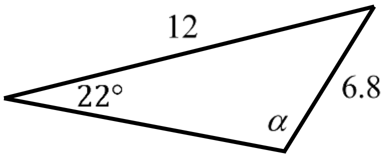
סרטון

1) מצאו את ערכו של α / x / y במשולשים הבאים:

א.



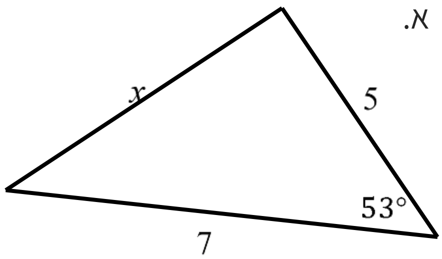
ב.



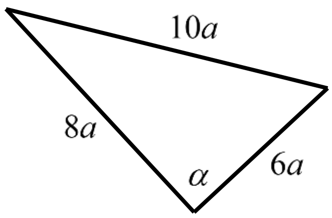
סרטון

2) מצאו את ערכו של α / x במשולשים הבאים:

א.

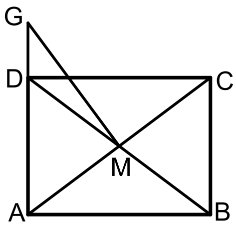


ב.



סרטון

3) אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M.
הנקודה G נמצאות על המשך הצלע AD.
נתון: AD = 3 ס"מ , AB = 4 ס"מ , DG = 1.2 ס"מ.
מצאו את גודלו של הקטע GM.



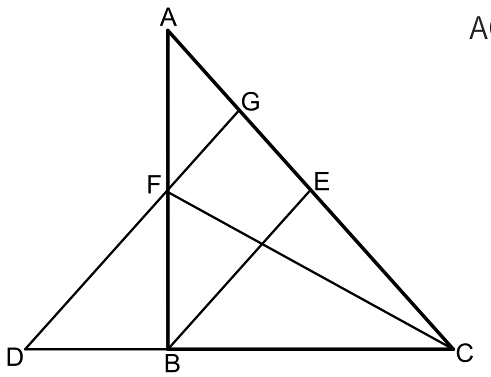
סרטון

4) BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.
מהנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: AC = DC
ו- $GD \parallel BE$.

א. הוכיחו: $\frac{AG}{BD}=\frac{3}{4}$.

ב. נתון כי: ME = 4 ס"מ.
חשבו את אורך הקטע DG.

ג. נתון כי: $\sphericalangle ACD = 48.189°$
הוכיחו כי המשולש DGC הוא שווה-שוקיים.



סרטון

5) המרובע $ABCD$ הוא טרפז ישר זווית $(AB \parallel CD\ ,\ \sphericalangle B=90^\circ)$.

מסמנים את הבסיס: $DC=3t$ ואת השוק $AD=4t$.

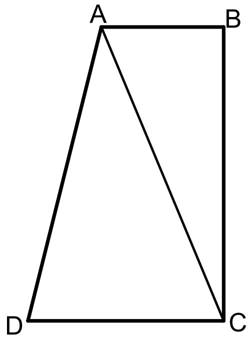
ידוע גם כי: $\sphericalangle D=60^\circ$.

א. הביעו באמצעות t את אורך האלכסון AC.

ב. מצאו את זווית ACB אם ידוע כי $AB=t$.

ג. נתון: $BC=4\sqrt{3}=$ 6.928 ס"מ.

חשבו את שטח הטרפז ABCD.



סרטון

6) מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA , OB , OC ו-OD.

ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α.

המשולש COD הוא ישר זווית $\sphericalangle CDO=90^\circ$.

נתונים האורכים: $DO=10\ ,\ BO=9$.

מסמנים: $CD=1.5m\ ,\ BC=1.4m$.

א. הביעו באמצעות m את $\sin\alpha$.

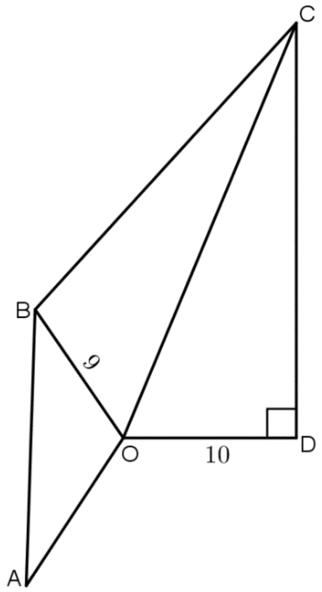
(העזרו במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. נתון גם כי: $AB=m$. מצאו את m

אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם

את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.

ג. חשבו את זווית BOC.



סרטון

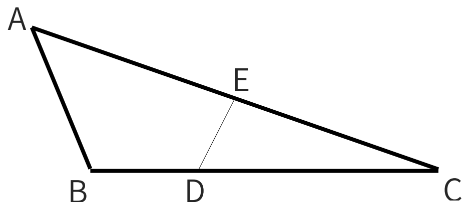
7) הצלע AC במשולש ABC גדולה פי 4 מהצלע AB.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D נמצאות

על הצלע BC כך שמתקיים $DC=2BD$.

נתון: $AB=a\ ,\ BC=b$.

הביעו באמצעות a ו-b את אורך הקטע DE.



שטחים:

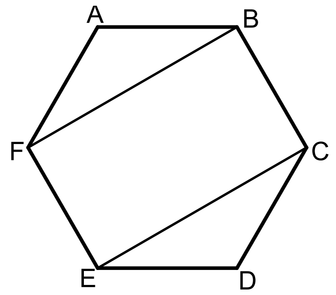
סרטון

1) באיור שלפניכם נתון משושה משוכלל ששטחו הכולל הוא S.

א. הביעו באמצעות S את אורך צלע המשושה.

ב. מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן BFEC.

הביעו באמצעות S את שטח המלבן.



סרטון

2) במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.

הנקודה E היא אמצע הצלע AC

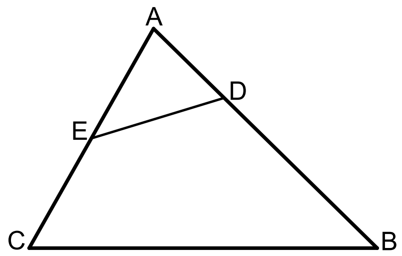
והנקודה D מקיימת: AD = 3 ס"מ.

ידוע כי: $\frac{DE}{BC}=\frac{2}{5}$.

א. מצאו את אורך הקטע DE.

ב. חשבו את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

ג. חשבו את שטח המרובע BCED.



סרטון

3) המרובע ABCD הוא טרפז $(AB \parallel CD)$.

הקטע AC הוא אלכסון בטרפז.

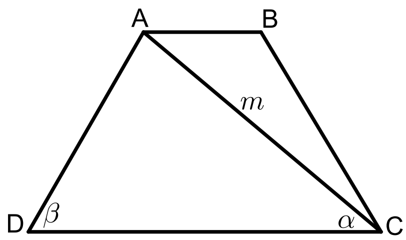
מסמנים: $\sphericalangle ADC=\beta$, $\sphericalangle ACD=\alpha$, $AC=m$.

א. הביעו באמצעות α, β ו-m את אורך הבסיס הגדול DC.

ב. נתון כי האלכסון AC מקיים: $S_{ADC}/S_{ABC}=3$.

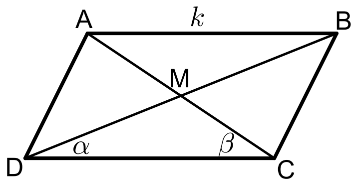
הביעו באמצעות α, β ו-m את הבסיס AB.

ג. חשבו את שטח הטרפז אם ידוע כי: $\beta=60°$, $\alpha=40°$ ו-$m=8$.



סרטון

4) נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים בנקודה M כמתואר באיור.



מסמנים: $\sphericalangle ACD=\beta$, $\sphericalangle BDC=\alpha$, $AB=k$.

א. הוכיחו כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

ב. ענו על השאלות הבאות:

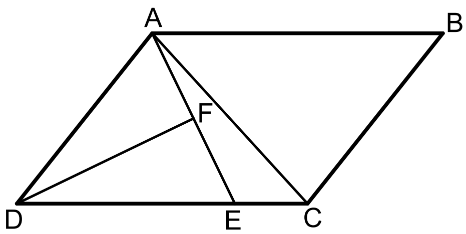
i. הביעו באמצעות α , β ו- k את שטח המשולש DMC.

ii. הביעו באמצעות α , β ו- k את שטח המקבילית ABCD.

ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD}=2$. הראו כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2\sin^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

סרטון

5) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים המקיימים: 3CE = DE.
מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.
ידוע כי: $\sphericalangle ADF=\sphericalangle CDF=\alpha$.
מסמנים: $CE=k$.



א. הביעו באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC.
הביעו באמצעות k ו- α את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצאו את α .

תשובות סופיות:

משפט הסינוסים והקוסינוסים:

1) א. $y=$ 22.2 ס"מ, $x=$ 18.58 ס"מ   ב. $\alpha=41.382°$ או $\alpha=138.618°$

2) א. $x=$ 5.646 ס"מ   ב. $\alpha=90°$

3) GM = 3.360 ס"מ

4) DG = 18.

5) א. $AC=t\sqrt{13}$ ב. $\sphericalangle ACB=16.1°$ ג. $S_{ABCD}=16\sqrt{3}\approx$ 27.712 סמ"ר.

6) א. $\sin\alpha=\frac{1.5m}{\sqrt{100+2.25m^2}}$ ב. $m=16$ ג. $56.94°$

7) $DE=\sqrt{\frac{1}{9}b^2-a^2}$

שטחים:

1) א. $\sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}}\approx 0.62\sqrt{S}$ ב. $\frac{2}{3}S$

2) א. DE = $2\sqrt{1.6}$ ס"מ = 2.53 ס"מ   ב. $R=2$ ג. $S=$ 21.48 סמ"ר

3) א. $DC=\frac{m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$ ב. $AB=\frac{m\sin(\alpha+\beta)}{3\sin\beta}$ ג. $S_{ABCD}=31.2$

4) ב. i. $\frac{k^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ ב. ii. $\frac{2k^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

5) א. $AE=6k\sin\alpha$ ב. $P_{ACE}=k+6k\sin\alpha+k\sqrt{25-24\cos 2\alpha}$

ג. $\alpha=14.47°$.

משימות לימוד עצמי

משימת לימוד 1 – אינדוקציה מתמטית:

סרטון

יישומון

צפו בסרטון , היכנסו ליישומון ועננו על השאלות הבאות:

תזכורת: אינדוקציה מתמטית היא שיטה המשמשת להוכחת טענה המתייחסת למספרים טבעיים.
בכדי להוכיח שטענה כלשהי מתקיימת לכל מספר טבעי נשתמש בעיקרון האינדוקציה
על פיו עלינו להוכיח שמתקיימות שתי הדרישות הבאות:
(1) המספר 1 מקיים את הטענה (שלב **הבסיס**).
(2) אם מספר טבעי כלשהו מקיים את הטענה אז גם המספר העוקב לו מקיים את הטענה.
(שלב **הצעד** או **הנחת האינדוקציה**).
כלומר, בשלב הראשון בודקים שהטענה נכונה ל $n=1$, ובשלב השני מניחים שהטענה נכונה
למספר טבעי $n=k$ ומוכיחים שהיא נכונה גם עבור $n=k+1$.
אקסיומת האינדוקציה קובעת כי מקיומן של שתי דרישות אלה נובע שהטענה מתקיימת
לכל מספר טבעי.
שימו לב: בכל פתרון, חשוב להראות בבירור את שלב הבסיס, את הנחת האינדוקציה ואת ההוכחה.
תזכורת: הגדרת עצרת של מספר טבעי: $n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n$ כמו כן מגדירים: $0!=1$.

1) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת כי השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

2) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת כי השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

3) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת כי השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי:

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$$

4) דנה רצתה לבדוק אם השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי: $1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2+n+1}{2}$.
לשם כך השתמשה באינדוקציה והראתה שאם מניחים שהשוויון נכון עבור $n=k$ טבעי כלשהו,
הוא נכון גם לגבי $n=k+1$ והסיקה מכך כי השוויון נכון.

א. בדקו שאכן טענתה של דנה מתקיימת,
(כלומר, הראו כי הטענה נכונה ל- $n=k+1$ כאשר מניחים שהיא נכונה ל- $n=k$).

ב. בדקו: (1) האם הטענה נכונה עבור $n=3$?
(2) האם הטענה נכונה עבור $n=1$?
(3) האם לדעתכם הטענה נכונה עבור n כלשהו?

ג. מה הייתה טעותה של דנה?

ד. תקנו את הביטוי בצד ימין של המשוואה כך שהטענה תהיה נכונה,
והוכיחו את נכונותה באינדוקציה.

5) דני רצה לבדוק אם השוויון הבא מתקיים לכל n טבעי: $2^n = n^2 - n + 2$.
דני בדק וראה כי השוויון אכן מתקיים עבור $n=3$, $n=2$, $n=1$ והסיק כי השוויון נכון לכל n
כי זכר במעורפל שלפי אקסיומת האינדוקציה, אם הטענה נכונה ל-$n=1$, ובנוסף אם בהנחה
שהיא נכונה ל-$k=2$ ומראים שהיא נכונה גם ל-$k+1$, אז היא נכונה לכל n.

א. בדקו את טענתו של דני לגבי $n=3$, $n=2$, $n=1$.
האם הם אכן מקיימים את המשוואה?

ב. האם דני צדק במסקנתו? הוכיחו או הפריכו אותה.

ג. מה הייתה טעותו של דני?

תזכורת:
א. כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי אי-זוגי:
(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=1$.
(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k הוא מספר טבעי אי-זוגי כלשהו)
נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$.
ב. תזכורת: כדי להוכיח באינדוקציה שטענה נכונה עבור כל n טבעי זוגי:
(1) נבדוק שהטענה נכונה עבור $n=2$.
(2) מההנחה שהטענה נכונה עבור $n=k$ (k הוא מספר טבעי זוגי כלשהו)
נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$.

6) הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי אי-זוגי מתקיים:

$$3+7+11+\ldots+(2n+1)=\frac{n^2+3n+2}{2}$$

7) הוכיחו באינדוקציה כי לכל n טבעי זוגי מתקיים:

$$4+10+16+\ldots+(3n-2)=\frac{n(3n+2)}{4}$$

8) הוכיחו בעזרת אינדוקציה והנוסחה לנגזרת של מכפלה את הנוסחה הבאה:
עבור נגזרת של x^n עבור n טבעי: $(x^n)'=nx^{n-1}$. (תזכורת: $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$)

9) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$4+7+10+13+\ldots+(3n+1)=\frac{n}{2}(3n+5)$$

סרטון

10) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 9+\ldots+n\cdot 3^{n-1}=\frac{1}{4}\left(3^n(2n-1)+1\right)$$

סרטון

11) הוכיחו באינדוקציה, או בכל דרך אחרת, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1\cdot 2!}{2}+\frac{2\cdot 3!}{4}+\frac{3\cdot 4!}{8}+\ldots+\frac{n\cdot(n+1)!}{2^n}=\frac{(n+2)!}{2^n}-2$$

סרטון

תשובות סופיות:

1) נבדוק עבור $n=1$: $1=\frac{1(1+1)}{2}=1$. התקבל פסוק אמת.

הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.

נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$.

צ"ל: $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

נקבל: $\frac{k\cdot(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)+2\cdot(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

2) נבדוק עבור $n=1$: $1^2=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2=1^3$. התקבל פסוק אמת.

הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: $1^3+2^3+\cdots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$, צ"ל:

$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.

נקבל: $\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=$

$$=(k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2^2}=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

3) שלב הבסיס: נבדוק עבור $n=1$: $1\cdot 1!=(1+1)!-1=1$. התקבל פסוק אמת.

הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1$.

נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n=k+1$, צ"ל:

$1\cdot 1!+\cdots+k\cdot k!+(k+1)\cdot(k+1)!=(k+2)!-1$

$(k+1)!-1+(k+1)\cdot(k+1)!=(k+1)!(k+1+1)-1=(k+2)(k+1)!-1=(k+2)!-1$

4) ב. (1) לא (2) לא (3) לא.

ג. דנה לא ביצעה את הצעד הראשון בהוכחת באינדוקציה – בדיקה עבור $n=1$. ד. $\frac{n^2+n}{2}$.

5) א. כן. ב. לא, אפשר להפריך ע"י בדיקה של $n=4$ למשל.

ג. דני ביצע את הצעד הראשון אבל שגה בהנחת האינדוקציה כאשר הניח $k=2$ ולא $n=k$.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) הוכחה על פי אינדוקציה כי $(x^n)'=nx^{n-1}$ נכון לכל n טבעי:

(1) שלב הבסיס - בדיקה עבור $n=1$: $(x^1)'=1x^0 \leftarrow x'=1 \leftarrow$ אמת.

(2) הנחת האינדוקציה עבור $n=k$: $(x^k)'=k\cdot x^{k-1}$.

(3) הוכחה עבור $n=k+1$:

נוכיח כי- $\left(x^{(k+1)}\right)'=(k+1)\cdot x^{(k+1)-1}$:

$$\left(x^{(k+1)}\right)'=(x^k\cdot x)'=1\cdot x^k+x\cdot(x^k)'=x^k+x\cdot kx^{k-1}=x^k+kx^k=(k+1)x^k$$

משימת לימוד 2 – מעגל היחידה:

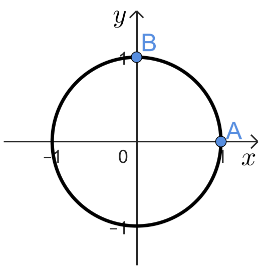
סרטון

צפו בסרטון ועָנו על השאלות הבאות:

חלק א' – היכרות עם מעגל היחידה

תזכורת: מעגל היחידה הוא מעגל שמרכזו בראשית הצירים ואורך הרדיוס שלו הוא יחידה אחת.

1) הביטו בסרטוט והשלימו את המשפטים הבאים:



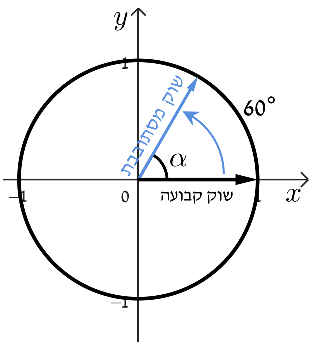
א. שיעורי הנקודה A:___________

ב. שיעורי הנקודה B:___________

ג. שיעור ה- x של נקודות על מעגל היחידה הוא בין_____ ל-______

ד. שיעור ה- y של נקודות על מעגל היחידה הוא בין_____ ל-______

הגדרת זווית במעגל היחידה - זווית מרכזית שיש לה שוק אחת קבועה מונחת על הכיוון החיובי של ציר x והשוק השנייה מתקבלת מסיבוב של רדיוס המעגל. סיבוב נגד כיוון השעון יוצר זווית חיובית, סיבוב עם כיוון השעון יוצר זווית שלילית.

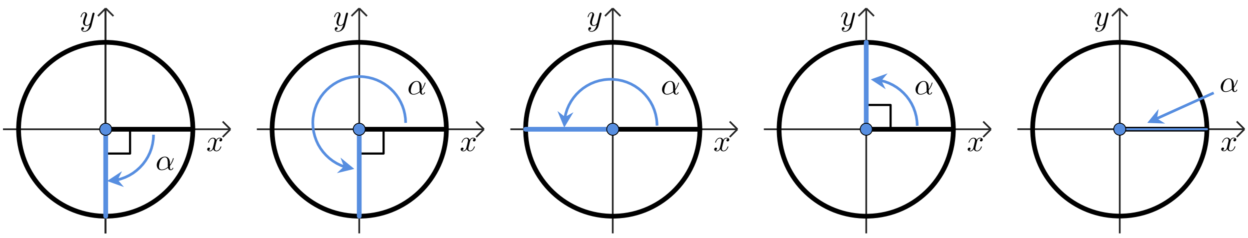


דוגמה:

בציור משמאלכם מתוארת זווית α בת $60°$, כאשר הרדיוס השחור מייצג את השוק הקבועה, והרדיוס בכחול את השוק שנעה נגד כיוון השעון.

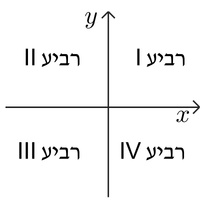
2) קבעו את גודל הזווית α בכל אחד מהשרטוטים הבאים:

א. ב. ג. ד. ה.



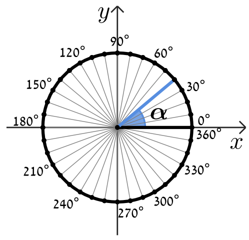
תזכורת:

מערכת הצירים מחלקת את המישור לארבעה רביעים באופן הבא:

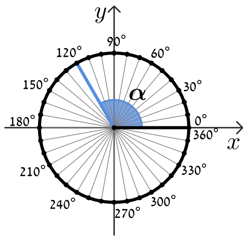


3) השלימו את גודל הזווית α והרביע המתאים עבור כל אחד מהשרטוטים שלפניכם:

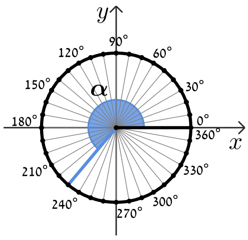
א.



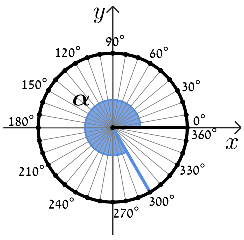
ב.



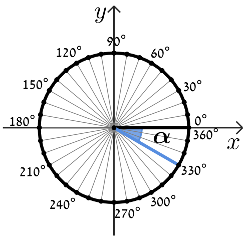
ג.



ד.



ה.



יישומון

4) העזרו ביישומון והשלימו את המשפטים הבאים:

א. זווית בת $100°$ נמצאת ברביע ה _______.

ב. זווית בת $390°$ נמצאת ברביע ה _______.

ג. זווית בת $750°$ נמצאת ברביע ה _______.

ד. זווית בת $-30°$ נמצאת ברביע ה _______.

ה. זווית בת $-200°$ נמצאת ברביע ה _______.

5) עבור כל משפט הקיפו בעיגול את התשובות הנכונות:

א. אם השוק המסתובבת נמצאת ברביע בראשון, הזווית יכולה להיות:

(1) $90°$ (2) $400°$ (3) $720°$ (4) $120°$ (5) $-300°$

ב. אם השוק המסתובבת נמצאת על ציר ה x , הזווית יכולה להיות:

(1) $0°$ (2) $270°$ (3) $720°$ (4) $180°$ (5) $-90°$

ג. אם השוק המסתובבת נמצאת על ציר ה y , הזווית יכולה להיות:

(1) $0°$ (2) $270°$ (3) $720°$ (4) $180°$ (5) $-90°$

ד. אם השוק המסתובבת נמצאת ברביע השלישי , הזווית יכולה להיות:

(1) $129°$ (2) $190°$ (3) $560°$ (4) $180°$ (5) $-110°$

ה. אם השוק המסתובבת נמצאת ברביע הרביעי, הזווית יכולה להיות:

(1) $0°$ (2) $270°$ (3) $710°$ (4) $280°$ (5) $-30°$

חלק ב' – הגדרת פונקציות טריגונומטריות במעגל היחידה

סרטון

יישומון

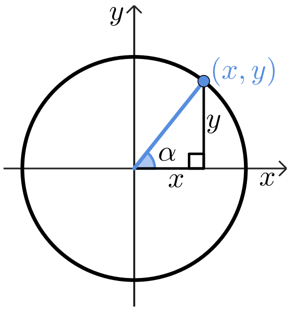
צפו בסרטון , היעזרו ביישומון , וענו על השאלות הבאות:

תזכורת:

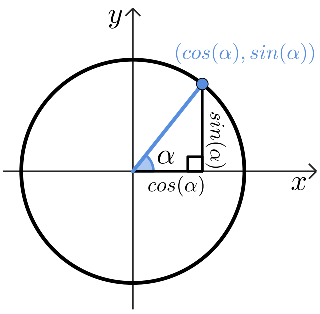
נקודה על מעגל היחידה תסומן ב- (x,y) ומייצגת זווית α חיובית כפי שהגדרנו מקודם.

- שיעור ה- x של נקודה על מעגל היחידה שווה ל- $\cos\alpha$.
- שיעור ה- y של נקודה על מעגל היחידה שווה ל- $\sin\alpha$.

סימון נקודה על מעגל היחידה



ערכי שיעורי הנקודה כתלות בזווית



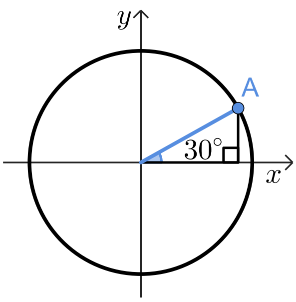
$\sin\alpha = \frac{y}{1} \rightarrow \boxed{y = \sin\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{x}{1} \rightarrow \boxed{x = \cos\alpha}$

דוגמא:

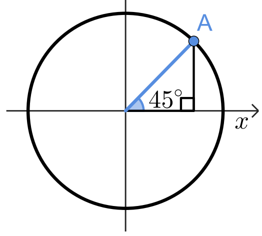
נמצא את שיעורי הנקודה A המתאימה לזווית בת $30°$ לפי השלבים הבאים:

- חישוב שיעור ה- x של הנקודה: $\cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- חישוב שיעור ה- y של הנקודה: $\sin30° = \frac{1}{2}$.
- כתיבת שיעורי הנקודה A: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

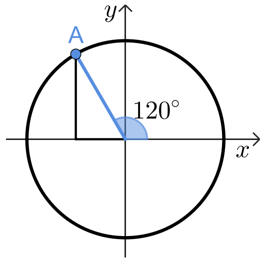


6) בכל אחד מהסרטוטים מצא את שיעורי הנקודה A המתאימה לזווית המסורטטת:

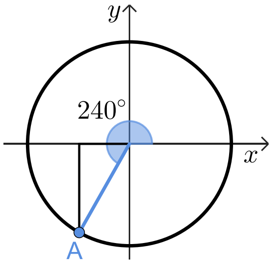
א.



ב.

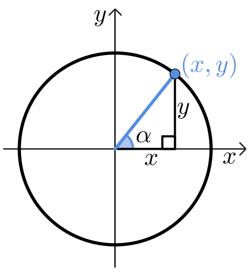


ג.



7) השלימו את הטבלה הבאה (במקרה ויש יותר מאופציה אחת לתשובה, הציעו דוגמה אחת):

זווית	שיעור הנקודה	רביע\על ציר
$60°$		
	$\left(\sqrt{3}/2\,,1/2\right)$	
$330°$		
	$\left(-1,0\right)$	
$-45°$		
$750°$		
$225°$		
		רביעי



8) השלימו את החסר:

א. לכל נקודה $A\left(x,y\right)$ על מעגל היחידה תחום הערכים של שיעורי הנקודה הם: $\_\_\le x\le\_\_$, $\_\_\le y\le\_\_$.

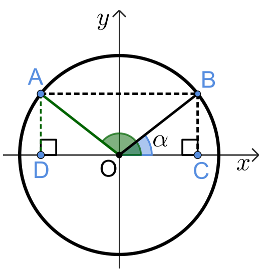
ב. לכל נקודה מתאימה $A\left(x,y\right)$ על מעגל היחידה מתאימה זווית α, כך ששיעורי הנקודה ניתנים לכתיבה באופן הבא: $A\left(\cos\alpha,\sin\alpha\right)$

ולכן טווח הערכים של הפונקציות $\sin\alpha$ ו- $\cos\alpha$ הוא: $\_\_\le\sin\alpha\le\_\_$, $\_\_\le\cos\alpha\le\_\_$.

חלק ג' – זהויות טריגונומטריות

סרטון

צפו בסרטון ועונו על השאלות הבאות:



9) המרובע ABCD הוא מלבן.

א. הוכיחו: $\Delta ADO\cong\Delta BCO$.

ב. השלימו את המשפטים הבאים (הביעו באמצעות α לפי הצורך):

(1) $\sphericalangle AOD=\_\_\_\_\_\_$.

(2) $\sphericalangle AOC=\_\_\_\_\_\_$.

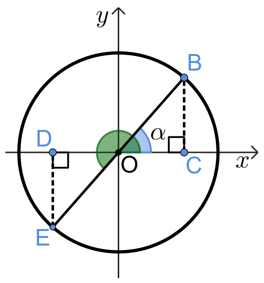
(3) שיעורי הנקודה B הם $(\_\_\_\_,\_\_\_\_)$.

(4) שיעורי הנקודה A הם $(\_\_\_\_,\_\_\_\_)$.

(5) $y_A=y_B$, ולכן מתקיימת הזהות: $\sin\left(180°-\alpha\right)=\_\_\_\_$.

(6) $x_A=-x_B$, ולכן מתקיימת הזהות: $\cos\left(180°-\alpha\right)=\_\_\_\_$.

10) הקטע BE עובר דרך ראשית הצירים.



א. הוכיחו: $\Delta EDO \cong \Delta BCO$.

ב. השלימו את המשפטים הבאים (הביעו באמצעות α לפי הצורך):

(1) $\sphericalangle EOD =$ ______ .

(2) $\sphericalangle EOC =$ ______ .

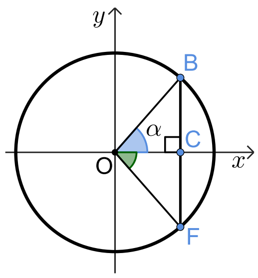
(3) שיעורי הנקודה B הם (____,____).

(4) שיעורי הנקודה E הם (____,____).

(5) $y_E = -y_B$, ולכן מתקיימת הזהות: $\sin(180° + \alpha) =$ ____ .

(6) $x_E = -x_B$, ולכן מתקיימת הזהות: $\cos(180° + \alpha) =$ ____ .

11) הקטע BF מאונך לציר ה- x.



א. הוכיחו: $\Delta FDO \cong \Delta BCO$.

ב. השלימו את המשפטים הבאים (הביעו באמצעות α לפי הצורך):

(1) $360° - \alpha =$ _____ $= \sphericalangle FOC$.

(2) שיעורי הנקודה B הם (____,____).

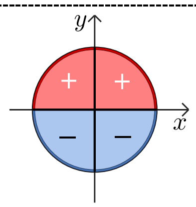
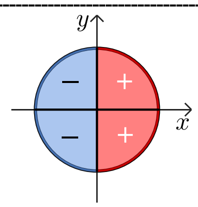
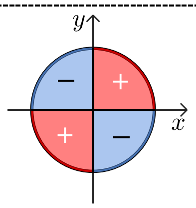
(3) שיעורי הנקודה F הם (____,____).

(4) $y_E = -y_B$, ולכן מתקיימת הזהות: $\sin(360° - \alpha) =$ ____ .

(5) $x_F = x_B$, ולכן מתקיימת הזהות: $\cos(360° - \alpha) =$ ____ .

לסיכום:

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
II	$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$	$\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$
III	$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$	$\tan(180° + \alpha) = \tan\alpha$
IV	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
סימנים			

12) השלימו את השוויונות הבאים בהתאם לזהויות שבכל רביע:

רביע IV	רביע III	רביע II
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(360°-\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$
$\sin(-30°)=\sin330°=-\sin(\_\_)$	$\sin200°=-\sin(\_\_)$	$\sin150°=\sin(\_\_)$
$\sin(-\_\_)=\sin(\_\_)=-\sin70°$	$\sin(\_\_)=-\sin40°$	$\sin(\_\_)=\sin40°$
$\cos(-30°)=\cos330°=\cos(\_\_)$	$\cos200°=-\cos(\_\_)$	$\cos150°=-\cos(\_\_)$
$\cos(-\_\_)=\cos(\_\_)=\cos70°$	$\cos(\_\_)=-\cos40°$	$\cos(\_\_)=-\cos40°$

סרטון

13) העבירו את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון. אין צורך לחשב את ערך הביטוי.

$\sin120°\ ,\ \cos150°\ ,\ \tan160°\ ,\ \cot130°\ ,\ \sin215°$

סרטון

14) העבירו את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון. אין צורך לחשב את ערך הביטוי.

$\cos245°\ ,\ \tan230°\ ,\ \cot200°\ ,\ \sin300°\ ,\ \cos310°$

סרטון

15) ענו ללא שימוש במחשבון:

$\cos(-45°)=$
$\sin510°=$
$\cos930°=$
$\tan(-225°)=$

$\tan225°=$
$\sin315°=$
$\cos120°=$
$\tan(-30°)=$

$\sin150°=$
$\cos210°=$
$\tan120°=$
$\sin330°=$

סרטון

16) חשבו את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\left(\sin240°\cdot\tan150°+\cos(-60°)\right)^2$

ב. $8\sin^2150°\cdot\tan135°-2\cdot\sin135°\cdot\cos(-135°)$

ג. $\dfrac{\cos225°}{\sin(-225°)-\cos315°}+\tan^2210°$

תשובות סופיות:

1) א. $(1,0)$ ב. $(0,1)$ ג. בין 1- ל-1 ד. בין 1- ל-1.

2) א. $\alpha=0°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$ ד. $\alpha=270°$ ה. $\alpha=-90°$

3) א. $\alpha=40°$, רביע ראשון ב. $\alpha=120°$, רביע שני ג. $\alpha=230°$, רביע שלישי
ד. $\alpha=300°$, רביע רביעי ה. $\alpha=-30°$, רביע רביעי

4) א. רביע שני ב. רביע ראשון ג. רביע ראשון ד. רביע רביעי ה. רביע שני.

5) א. (2) , (5) ב. (1) , (3) , (4) ג. (2), (5) ד. (2) , (3) , (5) ה. (3) , (4) , (5).

6) א. $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ב. $A\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ג. $A\left(-\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

7) להלן טבלה (מחולקת לשתי טבלאות):

זווית	שיעור הנקודה	רביע\על ציר
$60°$	$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	ראשון
$30°$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	ראשון
$330°$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$	רביעי
$180°$	$(-1,0)$	ציר x

זווית	שיעור הנקודה	רביע\על ציר
$-45°$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	רביעי
$750°$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	ראשון
$225°$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	שלישי
$300°$	$\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	רביעי

8) א. $-1\le y\le 1$, $-1\le x\le 1$ ב. $-1\le\sin\alpha\le 1$, $-1\le\cos\alpha\le 1$.

9) א. הוכחה. ב. (1) α ב. (2) $180°-\alpha$
ב. (3) $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ ב. (4) $(\cos(180°-\alpha),\sin(180°-\alpha))$
ב. (5) $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ ב. (6) $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$

10) א. הוכחה. ב. (1) α ב. (2) $180°+\alpha$
ב. (3) $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ ב. (4) $(\cos(180°+\alpha),\sin(180°+\alpha))$
ב. (5) $\cos(180°+\alpha)=-\sin\alpha$ ב. (6) $\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$

11) א. הוכחה.

ב. (1) $-\alpha$ ב. (2) $(\cos\alpha,\sin\alpha)$

ב. (3) $(\cos\alpha,-\sin\alpha)$ ב. (4) $\sin(360°-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

ב. (5) $\cos(360°-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

12) להלן טבלה:

רביע II	רביע III	רביע IV
$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(180°+\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\sin(360°-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(360°-\alpha)=\cos\alpha$
$\sin150°=\sin(30°)$	$\sin200°=-\sin(20°)$	$\sin(-30°)=\sin330°=-\sin(30°)$
$\sin(140°)=\sin40°$	$\sin(220°)=-\sin40°$	$\sin(-70°)=\sin(290°)=-\sin70°$
$\cos150°=-\cos(30°)$	$\cos200°=-\cos(20°)$	$\cos(-30°)=\cos330°=\cos(30°)$
$\cos(140°)=-\cos40°$	$\cos(220°)=-\cos40°$	$\cos(-70°)=\cos(290°)=\cos70°$

13) $\tan160°=-\tan20°$, $\cos150°=-\cos30°$, $\sin120°=\sin60°$

$\sin215°=-\sin35°$, $\cot130°=-\cot50°$

14) $\cot200°=\cot20°$, $\tan230°=\tan50°$, $\cos245°=-\cos65°$

$\cos310°=\cos50°$, $\sin300°=-\sin60°$

15) להלן פתרונות:

$\cos(-45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan225°=1$ $\sin150°=\frac{1}{2}$

$\sin315°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin315°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos210°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos120°=-\frac{1}{2}$ $\cos120°=-\frac{1}{2}$ $\tan120°=-\sqrt{3}$

$\tan(-30°)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\tan(-30°)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\sin330°=-\frac{1}{2}$

16) א. 1. ב. 1-. ג. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$.